

Stabilité et simplicité positives

Mohammed Belkasmi
 Université de Lyon
 Université Lyon 1
 CNRS UMR 5208 Institut Camille Jordan
 43 blvd du 11 novembre 1918
 69622 Villeurbanne cedex, France

2 mars 2013

Résumé

Dans la première partie de cet article on étudie la notion d'extension universel en théorie des modèles positive, on donne une preuve plus simple au théorème de la conservation de la séparation par passage aux restrictions élémentaires. Elle nous permet aussi de donner une construction du domaine universel.

Dans le reste de l'article nous continuons l'étude de la stabilité positive déjà entamée par Ben Yaacov dans [3]. Nous ajoutons une autre caractérisation de la stabilité par une propriété d'ordre positive, et nous étudions quelques conséquences de la stabilité positive. A la fin de l'article nous proposons une forme de stabilité faible compatible avec les notions de la simplicité positive au sens de Pillay.

1 Notions de la théorie des modèles positive

Dans cette section, nous rappellerons certaines définitions et notions de la logique positive. Pour plus de détails, [4], [1] sont des sources suffisamment complètes.

1.1 Outils de la logique positive

Définition 1 :

– Une formule positive est une formule existentielle de la forme

$$\exists \bar{x} \bigvee_i \bigwedge_j \varphi_{ij}(\bar{x})$$

où φ_{ij} sont des formules atomiques.

- Un énoncé *h-universel* est un énoncé de la forme $\neg\exists\bar{x}\varphi(\bar{x})$, où φ est une formule positive libre.
- Un énoncé *h-inductif* est une conjonction d'énoncés de la forme $\forall\bar{x}\varphi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{x})$, où φ et ψ sont des formules positives.
- Une théorie *h-inductive* est un ensemble d'énoncés *h-inductifs* consistant.
- Soient A, B deux L -structures et f un homomorphisme de A dans B , f est une immersion si pour toutes formules positives φ et uples $\bar{a} \in A$ on a

$$A \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow B \models \varphi(f(\bar{a}))$$

Une classe de modèles d'une théorie *h-inductive* qui elle seule représente la théorie et où presque la totalité des études de la théorie des modèles positive sont faites est la classe des existentiellement clos positives de la théorie.

On retiendra les notations \models et \vdash pour noter la satisfaction et le fait d'être conséquence respectivement. Parfois, afin de faciliter la lecture, nous utiliserons la notation $A \models \neg\varphi(\bar{a})$ pour remplacer $A \not\models \varphi(\bar{a})$ dans le cas d'une formule positive $\varphi(\bar{x})$ et d'un uple \bar{a} extrait de la structure A .

Définition 2 *Un modèle A d'une théorie *h-inductive* T est un existentiellement clos positif (pec) si tout homomorphisme d'un modèle de T dans A est une immersion.*

Dans toute la suite on utilise le mot pec pour abrégier existentiellement clos positif.

Exemple :

Soient $L = \{=\}$, et T la théorie *h-inductive* de l'égalité. Un pec de T ne peut pas avoir plus d'un élément. En effet

$$\{a, b, \dots\} \longrightarrow \{a\}$$

est un homomorphisme non injectif. \square

Définition 3 *Une théorie *h-inductive* est dite modèle-complète si tout modèle de T est pec.*

Deux théories *h-inductives* sont dites compagnes si elles ont les mêmes pec. Toute théorie *h-inductive* T a :

- Une compagne maximale dite enveloppe de Kaiser notée $Tk(T)$, qui est la théorie h-inductive des pec de T .
- Une compagne minimale notée $Tu(T)$ qui est la théorie h-universelle des pec de T .

Définition 4 [14] *Soient A, B deux L -structures, on dit que B est une extension élémentaire positive de A , si B est un pec de la théorie $Tk(A)$ dans le langage $L(A)$.*

1.2 Techniques d'amalgamation

nous abordons les techniques d'amalgamations proprement dites. L'efficacité de cette notion sera illustrée par son application dans les différentes sections de cet article.

Fait 1 ([4], **Amalgamation asymétrique**) *Soient A, B, C , des L -structures, g une immersion de A dans B et h un homomorphisme de A dans C , alors il existe D , un modèle de $Tk(C)$, un homomorphisme g' de B dans D , et une immersion h' de C dans D tels que $g' \circ g = h' \circ h$.*

Fait 2 ([1], **Amalgamation kaiserienne**) *Soient A une L -structure, B un modèle de $Tk(A)$ et C une L -structure dans laquelle A s'immerge. Alors il existe D un modèle de $Tk(C)$, et deux immersions φ, ψ , telles que le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{im} & B \\ im \downarrow & & \downarrow \varphi \\ C & \xrightarrow{\psi} & D \end{array}$$

Définition 5 *Soit T une théorie h-inductive. Un modèle A de T est dit une base d'amalgamation, si pour tous B, C modèles de T , où A se continue par des homomorphismes f et g , il existe D un modèle de T , et f', g' des homomorphismes tels que le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ C & \xrightarrow{f'} & D \end{array}$$

On dit que la théorie T a la propriété d'amalgamation si tous les modèles de T sont des bases d'amalgamation.

La section suivante sera un terrain d'application des techniques d'amalgamation et où nous rappellerons une caractérisation des bases d'amalgamation par la notion d'extension universelle.

1.3 Espaces de types positifs

Définition 6 *Soit T une théorie h -inductive. Un type en n variable est l'ensemble des formules positives satisfaites par un n -uplet dans un pec de T .*

On note $S_n(T)$ l'espace des n -types, et $S(T)$ l'espace de tous les types de T .

Topologie de $S_n(T)$

- La Topologie de $S_n(T)$ est définie par la famille des fermés élémentaires

$$F_\varphi = \{p \in S_n(T) \mid p \vdash \varphi\}$$

où φ parcourt l'ensemble des formules positives.

- L'espace $S_n(T)$ est compacte, mais en général il n'est pas séparé.

Définition 7 [4] *Une théorie h -inductive T est dite séparée si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(T)$ est séparée.*

Fait 3 ([4]) *Une théorie h -inductive T est séparée si et seulement si $Tk(T)$ a la propriété d'amalgamation.*

2 Extensions universelles

La notion d'extension universelle est réminiscente d'objets universels en théorie des catégories. Dans notre contexte, la limite inductive d'extensions universelles généralise la notion de saturation, comme cela se fait dans l'étude des classes élémentaires abstraites.

Dans cette section on étudie certaines propriétés de cette notion

2.1 Notion d'extension universelle

Définition 8 *Soient A, B deux modèles d'une théorie h -inductive T , et h un homomorphisme de A dans B . On dit que (B, h) est une extension universelle de A , si pour tout modèle C de T de cardinal $\leq |A|$ où A se continue par*

un homomorphisme f , il existe un homomorphisme g de C dans B tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} & & C \\ & \nearrow f & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Remarque :

Soient (B, h) est une extension universelle de A , et g un homomorphisme de B dans un modèle C de T . Alors $(C, g \circ h)$ est aussi une extension universelle de A . En particulier, A admet une extension universelle (B_e, h') , avec B_e un pec de T .

Définition 9 Soient T une théorie h -inductive et α un ordinal. Une chaîne universelle de longueur α de T est une famille inductive de modèles $\{A_i : i < \alpha\}$ (resp. $\{A_i : i \leq \alpha\}$ si α est successeur) de T avec une famille d'homomorphismes $\{f_{ij} : i \leq j < \alpha\}$ (resp. $\{f_{ij} : i \leq j \leq \alpha\}$ si α est successeur) telle que pour tout ordinal $\beta < \alpha$, $(A_{\beta+1}, f_{\beta, \beta+1})$ est une extension universelle de A_β et que si $\beta \leq \alpha$ est un ordinal limite alors A_β est la limite inductive des A_i avec $i < \beta$, $f_{i\beta}$ étant défini comme l'application canonique de A_i dans A_β .

Fait 4 ([1]) Soit $\{A_i; f_{ij} : i \leq j < \alpha\}$ une chaîne universelle de la théorie h -inductive T . on suppose que pour tout $i \leq \alpha$ ordinal limite, A_i est un pec de T . Dans ce cas, si $j \leq i$, l'application h_{ji} , qui par construction des limites inductives est l'application canonique de A_j vers A_i , alors (A_i, h_{ji}) est une extension universelle de A_j .

2.2 Application de la notion d'extension universelle

Dans la suite de cette section nous proposons quelques applications de la notion d'extension universelle en théorie des modèles positive.

La première application que nous proposons est la caractérisation des bases d'amalgamation qui nous sera utile dans la deuxième étude portée sur la topologie des espaces des types.

Fait 5 ([1]) Soit A un modèle d'une théorie h -inductive T . Alors A admet une extension universelle si et seulement si A est une base d'amalgamation.

La deuxième application est la donnée d'une autre preuve de la conservation de la séparation topologique par passage au restriction élémentaires positives.

Lemme 1 *Soit A une L -structure et B une extension élémentaire positive de A séparée, alors A est séparée*

Preuve. Par le fait 3 il suffit de montrer que la théorie $Tk(A)$ a la propriété d'amalgamation, ce qui est équivalent d'après le fait 5 à dire que tout modèle de $Tk(A)$ admet une extension universelle.

Soient A_1 et A_2 deux modèles de $Tk(A)$ tels que $|A_2| \leq |A_1|$ et A_1 se continue dans A_2 par un homomorphisme f . Par amalgamation Kiessérienne ou asymétrique on déduit l'existence de B_1 un modèle de $Tk(B)$ où A_1 s'immerge, ainsi on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{e} & B \\ i_1 \downarrow & & \downarrow i_2 \\ A_1 & \xrightarrow{i} & B_1 \end{array}$$

avec i, i_1, i_2 des immersions et e l'immersion élémentaire de A dans B . Maintenant par amalgamation asymétrique on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{e} & B \\ i_1 \downarrow & & \downarrow i_2 \\ A_1 & \xrightarrow{i} & B_1 \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ A_2 & \xrightarrow{im} & A'_2 \\ & & \downarrow g \\ & & B_2 \end{array}$$

avec A'_2 un modèle de $Tk(A)$ et im une immersion. Ensuite comme B est un pec de $Tk(A)$ et A'_2 un modèle de $Tk(A)$, alors $f' \circ i_2$ est une immersion, ce qui implique que A'_2 est un modèle de $Tu(B)$. Ce qui nous permet de continuer A'_2 dans B_2 un modèle de $Tk(B)$ par un homomorphisme g , en plus on peut prendre B_2 de cardinal inférieur au cardinal de B_1 .

Maintenant comme B_1 est un modèle de $Tk(B)$ et B est séparée, alors B_1 admet une extension universelle (B_2^*, h) . Ainsi on obtient le diagramme

commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{e} & B & & \\
 i_1 \downarrow & & \downarrow i_2 & & \\
 A_1 & \xrightarrow{i} & B_1 & \xrightarrow{h} & B_2^* \\
 f \downarrow & & \downarrow f' & & \nearrow h' \\
 A_2 & \xrightarrow{im} & A'_2 & & \\
 & & \downarrow g & & \\
 & & B_2 & &
 \end{array}$$

Par cette construction on déduit que $(B_2^*, h \circ i)$ est une extension universelle de A_1 . Ainsi tout modèle A_1 de $Tk(A)$ est une base d'amalgamation dans la classe des modèles de $Tk(A)$. \square

La dernière application de la notion des extensions universelles est la construction de domaine universel d'une théorie h-inductive complète non bornée.

Définition 10 :

Une théorie h-inductive est dite complète, si elle a la propriété de la continuation commune (pour tous A, B modèles de T , il existe $C \models T$ où A et B se continuent.)

Une théorie h-inductive est bornée s'il existe une borne sur le cardinal de ses pec.

Exemples :

- Soit A une structure la théorie $Tk(A)$ est complète.
- La théorie h-inductive de la structure (\mathbb{Q}, \leq) dans le langage $L(\mathbb{Q}) = \{\leq, q \mid q \in \mathbb{Q}\}$ est bornée.

Un domaine universel, de façon similaire aux modèles monstres en théorie des modèles usuelle, est une structure suffisamment homogène et saturée. Dans cette section, nous montrerons l'existence des λ -domaines universels dans le contexte positif en passant par les chaînes universelles (définition 9).

Définition 11 ([12]) *Soient T une théorie h-inductive, et λ un cardinal. Un modèle M de T est dit un λ -domaine universel s'il vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. λ -universel : tout type partiel $p(\bar{x})$ avec paramètres dans une partie A de M de cardinal $< \lambda$, et finiment satisfaisable dans M , est réalisé dans M .

2. λ -homogène : pour tous A, B des modèles de T qui s'immergent dans M et de cardinal $< \lambda$, et f un isomorphisme entre A et B (ie une bijection telle que f et f^{-1} sont des immersions). Alors il existe un automorphisme de M qui prolonge f .

Le fait suivant nous montre que dans un λ -domaine universel la λ -homogénéité est équivalente à la propriété suivante : toute paire d'uples de longueur strictement inférieure à λ et de même type se correspondent par automorphisme du domaine universel.

Fait 6 ([4]) Soient M un λ -domaine universel et \bar{a}, \bar{b} des uples de longueur strictement inférieure à λ et de même type. Alors il existe un automorphisme f de M tel que $f(\bar{a}) = \bar{b}$.

Remarque : Il s'ensuit de la définition 11 que les domaines universels sont pec.

Exemple 7 Soit T une théorie h-inductive bornée et complète, alors le pec maximal de théorie T est un domaine universel en son cardinal.

Le théorème suivant donne la construction d'un λ -domaine universel comme celui-ci était défini ci-dessus. La raisonnement utilise les extensions universelles (la définition 8) auxquelles on aboutit en construisant une chaîne universelle de modèles pec de longueur ω . Cette longueur nous permet d'adopter une notation simplifiée en réduisant la famille inductive nécessaire pour la construction à une chaîne.

Théorème 1 Soit T une théorie h-inductive, complète, non bornée. Soit $\{A_i, h_i | i < \omega\}$ une chaîne universelle telle que $cf(|A_0|) > \max(\aleph_0, |L|)$ et que pour tout $i < \omega$, A_i est un pec de T . Soit A la limite inductive de la chaîne universelle, et on pose $\lambda = |A|$. Alors A est un $cf(\lambda)$ -domaine universel.

Preuve. D'abord nous allons montrer que A est $cf(\lambda)$ -universel. Soit B une partie de A de cardinal $< cf(\lambda)$, et π une famille de formules positives finiment satisfaisable dans A . Alors il existe C un modèle de T où A se continue par un homomorphisme f et qui réalise π par un uple \bar{c} . Par définition de la cofinalité, il existe $m < \omega$ tel que $B \subset A_m$. Soient g la restriction de f à A_m et C^* le plus petit modèle de T qui contient $g(A_m) \cup \{\bar{c}\}$ de cardinal $\leq |A_m|$ et qui s'immerge dans C . Par conséquent, il existe h un homomorphisme de C^* vers A tel que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & C^* \\ & \nearrow g & \downarrow h \\ A_m & \xrightarrow{i} & A \end{array}$$

Alors $h(\bar{c})$ est une réalisation de π dans A .

Maintenant montrons que A est $cf(\lambda)$ -homogène. Soient C_1 et C_2 deux modèles de T inclus dans A par immersion, de cardinal $< cf(\lambda)$ et qui sont isomorphes. Par la définition de la cofinalité, il existe $m < \omega$ tel que $C_i \subset A_m$. Alors par le lemme 2, il existe D un modèle de T et f, g des immersions tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{is} & C_2 \\ im \downarrow & & \downarrow g \\ A_m & \xrightarrow{f} & D \end{array}$$

Remarquons qu'on peut remplacer D dans le diagramme par $B_0 = f(A_m)$ sans perte de généralité. Ainsi on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{is} & C_2 \\ im \downarrow & & \downarrow im \\ A_m & \xrightarrow{f_0} & B_0 \end{array}$$

Maintenant A_m et B_0 sont isomorphes, on répète le même raisonnement et on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{is} & C_2 \\ im \downarrow & & \downarrow im \\ A_m & \xrightarrow{f_0} & B_0 \\ \downarrow h_m & & \downarrow g_0 \\ A_{m+1} & \xrightarrow{f_1} & B_1 \end{array}$$

Donc A_{m+1} et B_1 sont isomorphes et (B_1, g_0) est une extension universelle de B_0 . Ainsi on définit une deuxième chaîne universelle $\{B_i, g_i | \beta \leq i < \omega\}$, isomorphe à la chaîne $\{A_i, h_i | m \leq i < \omega\}$. Soit B la limite de cette chaîne. et on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
C_1 & \xrightarrow{is} & C_2 \\
im \downarrow & & \downarrow im \\
A_m & \xrightarrow{f_0} & B_0 \\
h_m \downarrow & & \downarrow g_0 \\
A_{m+1} & \xrightarrow{f_1} & B_1 \\
\vdots \downarrow & & \downarrow \vdots \\
A & \xrightarrow{f} & B
\end{array}$$

Alors l'application f est un isomorphisme de A dans B qui prolonge l'isomorphisme entre C_1 et C_2 .

Montrons que $A = B$. D'abord rappelons que si $\{C'_k, f_{kl} | k < l < \omega\}$ est une sous-suite inductive extraite de la suite inductive $\{C_i, f_{ij} | i < j < \omega\}$, alors les deux suites ont la même limite inductive. En se basant sur cette propriété et en construisant une suite inductive qui alterne deux suites extraites respectivement des chaînes $\{A_i, h_i | m \leq i < \omega\}$ et $\{B_i, g_i | i < \omega\}$, on montrera que $A = B$. Reprenons le diagramme commutatif construit dans l'étape précédente

$$\begin{array}{ccc}
C_1 & \xrightarrow{is} & C_2 \\
im \downarrow & & \downarrow im \\
A_m & \xrightarrow{f_0} & B_0 \\
h_m \downarrow & \searrow k_1 & \downarrow g_0 \\
A_{m+1} & \xrightarrow{f_1} & B_1 \\
h_{m+1} \downarrow & \searrow k_2 & \downarrow g_1 \\
A_{m+2} & \xrightarrow{f_2} & B_2 \\
h_{m+2} \downarrow & \searrow k_3 & \downarrow g_2 \\
A_{m+3} & \xrightarrow{f_3} & B_3 \\
\vdots \downarrow & & \downarrow \vdots \\
A & \xrightarrow{f} & B
\end{array}$$

avec $k_1 = g_0 \circ f_0$, $k_2 = f_2^{-1} \circ g_1 = h_{m+1} \circ f_1^{-1}$ et $k_3 = g_2 \circ f_2$. Soit la suite

inductive

$$A_m \xrightarrow{k_1} B_1 \xrightarrow{k_2} A_{m+2} \xrightarrow{k_3} B_3 \cdots$$

Alors on a $k_2 \circ k_1 = h_{m+1} \circ h_m$ et $k_3 \circ k_2 = g_2 \circ g_1$. Ainsi la suite inductive construite est une alternation des deux sous-suites inductives extraites respectivement de $\{A_i, h_i | m \leq i < \omega\}$ et $\{B_i, g_i | i < \omega\}$. Par suite on déduit que les limites de ces deux suites, qui sont respectivement A et B , sont égales. \square

Corollaire 1 *Soit T une théorie h -inductive complète et non bornée, alors pour tout cardinal $\alpha > \max(\aleph_0, |L|)$ il existe un λ -domaine universel de T avec λ un cardinal supérieur à α .*

Preuve. Soient $\alpha > \max(\aleph_0, |L|)$ et β un cardinal tel que $cf(\beta) > \alpha$. Comme la théorie T est non bornée, il existe A_0 un pec de cardinal supérieur à λ . D'après le théorème 5, il existe (A_1, h_1) une extension universelle de A_0 , avec A_1 un pec de cardinal $\leq 2^{|A_0|}$. En répétant le même raisonnement, on construit une chaîne universelle $\{A_i, h_i | i < \alpha\}$ où α est un ordinal limite. D'après le théorème 1, la limite inductive A de la chaîne universelle construite est $cf(|A|)$ -domaine universelle. \square

Théorème 2 (Erdős-Rado) *Soit λ un cardinal infini et $k \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\beth_k(\lambda)^+ \longrightarrow (\lambda^+)_\lambda^{k+1}.$$

Fait 8 *Soient T une théorie h -inductive, non bornée avec $jocp$, $\lambda > |S_k(T)|$ et $\mu = \beth_{\lambda^+}$. Soit M un pec de T , tel que $|M| \geq \mu$. Alors pour toute suite $(\bar{a}_i | i < \mu)$ de k -uples, il existe M^* un modèle pec de T de même cardinal que M et où M s'immerge, et une suite $(\bar{b}_i | i < \omega)$ indiscernable de M^* , telle que pour toute $n < \omega$ il existe $i_0 < \dots < i_{n-1} < \mu$ pour laquelle*

$$tp(\bar{a}_{i_0}, \dots, \bar{a}_{i_{n-1}}) = tp(\bar{b}_0, \dots, \bar{b}_{n-1})$$

3 Stabilité positive

Dans cette section, nous adoptons les définitions et les résultats de Ben Yaacov dans [3], et nous poursuivons le travail dans le cadre positif. L'une des nouveautés est une notion d'ordre définissable. Sans surprise, la différence fondamentale par rapport à la théorie des modèles usuelle est l'absence de la négation, indispensable pour ordonner un ensemble définissablement. Nous proposons une définition de la propriété de l'ordre en utilisant des paires de

formules contradictoires (définition 15). Cette approximation positive à la négation caractérise la stabilité. Une adaptation positive d'un théorème de Shelah (théorème 3) s'avère crucial dans le cas des théories non bornées.

L'étude de la stabilité positive est réservée aux pec des théories h-inductives complètes, ce qui met en défaut le théorème de compacité. En effet, ce théorème n'est utile que quand la classe des pec est élémentaire. Ceci nous contraint à utiliser des techniques de la combinatoire des cardinaux, ce qui nous permet de ne pas sortir de la classe des pec. Soulignons que l'absence de notre travail des caractérisations, pourtant naturelles, de la stabilité par les (co)héritiers est liée à ce problème.

3.1 Rang de Shelah positif

Dans cette section on reprend la définition du rang de Shelah positif comme il a été donné dans [3]. On en étudie les caractérisations dans le cadre positif en reproduisant ceux qui existent dans [16].

Définition 12 Soient T une théorie h-inductive, A un sous-ensemble d'un modèle de T , et $\Gamma(\bar{x}, A)$ une famille de formules positives à paramètres dans A . On dit que Γ est un type partiel si il existe B un modèle de T , et \bar{b} un uple de B tel que $B \models \varphi(\bar{b}, \bar{a})$ pour toute formule $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ de Γ .

Remarque : De façon équivalente $\Gamma(\bar{x}, A)$ est un type partiel si et seulement si dans le langage $L \cup \{A, \bar{x}\}$ la famille $T \cup \Gamma(\bar{x}, A)$ est consistante.

Définition 13 Soit $p(\bar{x})$ un type partiel (éventuellement à paramètres dans un ensemble A), $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ une L -formule positive, et $\psi(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{Res}_T(\varphi(\bar{x}, \bar{y}))$. Le rang de Shelah de p , par rapport au couple (φ, ψ) , qu'on note $R(p, \varphi, \psi)$, est défini par induction comme suit :

1. $R(p, \varphi, \psi) \geq 0$ si et seulement si p est consistant,
2. Si β est un ordinal limite, $R(p, \varphi, \psi) \geq \beta$ si et seulement si pour tout $\alpha < \beta$, $R(p, \varphi, \psi) \geq \alpha$
3. $R(p, \varphi, \psi) \geq \alpha + 1$ si et seulement si il existe \bar{b} tel que

$$\begin{cases} R(p(\bar{x}) \cup \{\varphi(\bar{x}, \bar{b})\}, \varphi, \psi) \geq \alpha \\ R(p(\bar{x}) \cup \{\psi(\bar{x}, \bar{b})\}, \varphi, \psi) \geq \alpha. \end{cases}$$

Lemme 2 Soient $p(\bar{x})$ un type partiel, $\varphi_0(\bar{x}, \bar{y})$ une formule positive (où \bar{x} est un m -uple et \bar{y} un n -uple), et soit $\varphi_1 \in \text{Res}_T(\varphi_0(\bar{x}, \bar{y}))$. Alors $R(p, \varphi_0, \varphi_1) \geq n$ si et seulement si il existe une famille de n -uples $\{a_\eta : \eta \in {}^{n\geq 2}\}$ tels que :

1. Pour tout $\eta \in {}^{n> 2}$ on a $a_\eta \hat{\smallfrown}_0 = a_\eta \hat{\smallfrown}_1$, et $\bar{a}_0 = \bar{a}_1$

2. Pour tout $\eta \in {}^n 2$, la famille de formules positives

$$p(\bar{x}) \cup \{\varphi_{\eta(l)}(\bar{x}, a_{\eta|l}) \mid l < n\}$$

est consistante.

Preuve. Par induction, supposons que $R(p, \varphi_0, \varphi_1) \geq n + 1$. Par définition du rang 13 il existe \bar{b} telle que

$$\begin{cases} R(p(\bar{x}) \cup \{\varphi_0(x, \bar{b})\}, \varphi_0, \varphi_1) \geq n \\ R(p(\bar{x}) \cup \{\varphi_1(x, \bar{b})\}, \varphi_0, \varphi_1) \geq n. \end{cases}$$

Par hypothèse d'induction, il existe $(c_\eta \mid \eta \in {}^{n \geq 2})$ et $(d_\eta \mid \eta \in {}^{n \geq 2})$ deux suites de n-uples qui vérifiant la propriété (1) et telles que pour tout $\eta \in {}^n 2$

$$(\star) \begin{cases} p(x) \cup \{\varphi_0(\bar{x}, \bar{b})\} \cup \{\varphi_{\eta(l)}(\bar{x}, \bar{c}_{\eta|l}) \mid l < n\} \text{ est consistante} \\ p(x) \cup \{\varphi_1(\bar{x}, \bar{b})\} \cup \{\varphi_{\eta(l)}(\bar{x}, \bar{d}_{\eta|l}) \mid l < n\} \text{ est consistante.} \end{cases}$$

Soit $\{\bar{b}_\rho \mid \rho \in {}^{n+1 \geq 2}\}$ la famille définie comme suit : pour tout $\rho \in {}^{n+1 \geq 2}$, soit $\eta = \rho \upharpoonright \{1, \dots, n\}$

$$\begin{cases} \bar{b}_\rho = \bar{b} \hat{\wedge} \bar{c}_\eta & \text{si } \rho(0) = 0 \\ \bar{b}_\rho = \bar{b} \hat{\wedge} \bar{d}_\eta & \text{si } \rho(0) = 1. \end{cases}$$

D'après (\star) pour tout $\rho \in {}^{n+1 \geq 2}$, la famille $p(\bar{x}) \cup \{\varphi_{\rho(l)}(\bar{x}, \bar{b}_{\rho|l}) \mid l < n+1\}$ est consistante. La propriété (1) est évidente par la construction de la famille.

L'autre direction est évidente. \square

Remarque : Pour tout paire $p(\bar{x}), q(\bar{x})$ de types partiels tels que $p \vdash q$ et pour tout couple de formule (φ, ψ) qui vérifie les conditions de la définition 13 on a $R(p, \varphi, \psi) \leq R(q, \varphi, \psi)$.

Corollaire 2 Soient p un type partiel, $\varphi_0(\bar{x}, \bar{y})$ une L -formule positive avec $l(\bar{x}) = n, l(\bar{y}) = m$ et $\varphi_1 \in \text{Res}_T(\varphi_0)$. Supposons que $R(p, \varphi_0, \varphi_1) \geq \omega$ alors pour tout ordinal μ la famille

$$\Gamma = p(\bar{x}_\eta) \cup \{\varphi_{\eta(\alpha)}(\bar{x}_\eta, \bar{y}_{\eta \upharpoonright \alpha}) \mid \eta \in {}^\mu 2, \alpha < \mu\} \cup \{\bar{y}_\eta \hat{\wedge}_0 = \bar{y}_\eta \hat{\wedge}_1 \mid \eta \in {}^{>\mu} 2\} \cup \{\bar{a}_0 = \bar{a}_1\}$$

est consistante, avec x_η un n -uple et y_η un m -uple.

Preuve. Un fragment fini Σ de Γ est la donnée de $\alpha_1 < \dots < \alpha_n < \mu$, et η_1, \dots, η_m de ${}^\mu 2$ tels que

$$\Sigma = \{\varphi_{\eta_i(\alpha_j)}(\bar{x}_{\eta_i}, \bar{y}_{\eta_i \upharpoonright \alpha_j}), \bar{y}_{\eta_i} \hat{\wedge}_0 = \bar{y}_{\eta_i} \hat{\wedge}_1 \mid 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m\}$$

Comme $R(\bar{x} = \bar{x}, \varphi_0, \varphi_1) \geq m.n$, par le lemme 2 il existe une famille $\{\bar{a}_\eta, \bar{b}_\eta \mid \eta \in {}^{nm \geq 2}\}$ tels que :

1. pour tout $\eta \in {}^{nm}>2$ on a $\bar{b}_{\eta \wedge 0} = \bar{b}_{\eta \wedge 1}$,
2. pour tout $\eta \in {}^{nm}2$, la famille de formules positives

$$p(\bar{x}) \cup \{\varphi_{\eta(l)}(\bar{x}, b_{\eta|l}), \quad l < nm\}$$

est réalisé par \bar{a}_η .

En interprétant les y_{η_i} par les éléments de \bar{b}_η , et les x_{η_j} par la réalisation \bar{a}_η avec η dans ${}^{m.n \geq 2}$, on obtient la consistance du fragment fini Σ , et par suite la consistance de Γ . \square

Corollaire 3 Soient $p(\bar{x})$ un type partiel (eventuellement avec paramètres), $\varphi_0(\bar{x}, \bar{y})$ une formule positive et $\varphi_1 \in \text{Res}_T(\varphi_0)$, supposons que $R(p, \varphi_0, \varphi_1) = n$ alors il existe ψ telle que $p \vdash \psi$ et $R(\psi, \varphi_0, \varphi_1) = n$

Preuve. Par l'absurde supposons que pour toute formule positive ψ telle que $p \vdash \psi$, on a $R(\psi, \varphi_0, \varphi_1) \geq n + 1$. Alors $\Gamma_\psi = \{\psi(\bar{x}_\eta) \wedge \varphi_{\eta(l)}(\bar{x}_\eta, \bar{y}_{\eta|l}) \mid \eta \in {}^{n+1}2, l \leq n+1\} \cup \{\bar{y}_{\eta \wedge 0} = \bar{y}_{\eta \wedge 1} \mid \eta \in {}^{n>}2\}$ est consistante, ce qui implique la consistance de $\Gamma = p(\bar{x}_\eta) \cup \{\varphi_{\eta(l)}(\bar{x}_\eta, \bar{y}_{\eta|l}) \mid \eta \in {}^{n+1}2, l \leq n+1\} \cup \{\bar{y}_{\eta \wedge 0} = \bar{y}_{\eta \wedge 1} \mid \eta \in {}^{n>}2\}$. Ainsi par le lemme 2 on déduit que $R(p, \varphi_0, \varphi_1) \geq n + 1$, contradiction. Par conséquent il existe ψ dans p telle que $R(\psi, \varphi_0, \varphi_1) \leq n$. \square

Corollaire 4 Soient $\psi(\bar{x}, \bar{z})$ et $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ deux L -formules positives, et $\varphi_1 \in \text{Res}_T(\varphi_0)$, et soient \bar{a} et \bar{b} deux uples (dans un pec de T) qui ont le même type. Pour tout entier naturel n , si $R(\psi(\bar{x}, \bar{a}), \varphi_0, \varphi_1) \geq n$ alors $R(\psi(\bar{x}, \bar{b}), \varphi_0, \varphi_1) \geq n$.

Preuve. Supposons que $R(\psi(\bar{x}, \bar{a}), \varphi_0, \varphi_1) \geq n$. D'après le lemme 2

$$\{\psi(\bar{x}_\eta, \bar{a})\} \cup \{\varphi_{\eta(l)}(\bar{x}_\eta, \bar{y}_{\eta|l}) \mid l \leq n, \eta \in {}^n2\} \cup \{\bar{y}_{\eta \wedge 0} = \bar{y}_{\eta \wedge 1} \mid \eta \in {}^{n>}2\}$$

est consistante, par conséquent la formule positive

$$\exists_{l \leq n} \bar{x}_\eta \bar{y}_{\eta|l} (\psi(\bar{x}_\eta; \bar{z}) \wedge \bigwedge_{l \leq n} \varphi_{\eta(l)}(\bar{x}_\eta, \bar{y}_{\eta|l}) \wedge \bigwedge_{\eta \in {}^{n>}2} \bar{y}_{\eta \wedge 0} = \bar{y}_{\eta \wedge 1})$$

est dans le type de \bar{a} . Par suite elle appartient aussi au type de \bar{b} , ce qui implique par le lemme 2 que $R(\psi(\bar{x}, \bar{b}), \varphi_0, \varphi_1) \geq n$. \square

3.2 Stabilité positive

Notre définition de la stabilité positive suit celle naturelle qui fait intervenir le comptage des types. Soulignons quand-même que, la notion de type positif n'ayant un sens que dans les pec d'une théorie h -inductive, nous nous restreindrons à cette classe de modèles. En partant des travaux de Ben Yaacov dans [3], on réussit à obtenir des caractérisations de cette notion bien connues en théorie des modèles usuelle. Il faut souligner quand même que la caractérisation par la présence d'un ensemble infini et ordonné positivement nécessite des études séparées pour les théories bornées et non bornées. Ceci est lié à l'utilisation des techniques combinatoires, en particulier le théorème d'Erdős-Rado (théorème 2).

Définition 14 *Soient T une théorie h -inductive complète, et λ un cardinal. On dit que T est λ -stable si pour tout pec A de T de cardinal $\lambda \geq |L|$ on a :*

$$|S(A)| \leq \lambda$$

La théorie T est dite stable si elle est λ -stable pour un certain λ .

Une structure M est dite stable si la théorie $Tk(M)$ est stable.

Notre premier exemple d'une théorie stable provient d'une classe de structures particulières à la théorie des modèles positive : les structures bornées. et on commence par étudier la stabilité positive. Nous remercions Poizat pour cette suggestion.

Lemme 3 *Toute théorie h -inductive complète bornée est stable.*

Preuve. Comme T est une théorie bornée, le cardinal

$$\lambda = \max\{|M| \mid M \text{ un pec de } T\}$$

existe. Nous vérifions que T est λ -stable. Sinon, il existe M un pec de T de cardinal λ tel que $|S(M)| > \lambda$, ce qui implique l'existence d'une extension élémentaire positive N de M qui est aussi un pec de T (lemme ??) et qui réalise tous les types de $S(M)$. Ainsi M est un pec de T de cardinal $> \lambda$, une contradiction. \square

Un exemple de théorie h -inductive complète stable non bornée est celui de la théorie des corps de caractéristique fixée dans le langage usuel des corps. Cette théorie est complète positivement. Ses pec sont les corps algébriquement clos de même caractéristique. Vu que la théorie de cette classe est complète et stable au sens de la théorie des modèles usuelle, on déduit la

stabilité positive en appliquant directement la définition 14. Ainsi, la théorie des corps de caractéristique fixée est stable positivement.

Précisons que cette théorie n'est même pas complète dans la logique usuelle. Par conséquent, il n'est même pas possible de parler de sa stabilité dans la logique usuelle. Nous reviendrons sur la comparaison des stabilités dans la logique positive et la logique usuelle dans la section 3.5.

Lemme 4 *Soient T une théorie h -inductive complète, et (φ_0, φ_1) un couple de formules positives telles que $\varphi_1 \in \text{Res}_T(\varphi_0)$ et $R(\bar{x} = \bar{x}, \varphi_0, \varphi_1) \geq \omega$. Alors pour aucun cardinal λ , T n'est λ -stable.*

Preuve. Soient λ un cardinal infini, et $\mu = \min\{\mu | 2^\mu > \lambda\}$, alors $\sum_{\alpha < \mu} 2^\alpha \leq \lambda$. Par le corollaire 2 la famille

$$\Gamma = \{\varphi_{\eta(\alpha)}(\bar{x}_\eta, \bar{y}_{\eta \upharpoonright \alpha}) \mid \eta \in {}^\mu 2, \alpha < \mu\} \cup \{\bar{y}_0 = \bar{y}_1\}$$

est consistante avec \bar{x}_η un n -uple, et \bar{y}_η un μ -uple.

Soient $B = \{b_\eta \mid \eta \in {}^{\mu > 2}\}$ et $A = \{\bar{a}_\eta \mid \eta \in {}^\mu 2\}$ un couple qui réalise Γ . Par définition de μ , on a $|A| \leq \lambda$. Maintenant montrons que si $\eta \neq \nu \in {}^\mu 2$, alors $tp(\bar{a}_\eta / A) \neq tp(\bar{a}_\nu / A)$. En effet soit $\rho = \eta \wedge \nu$, en d'autres termes, il existe $\beta < \alpha$ tels que $\rho \in {}^\beta 2$ et $\eta \upharpoonright \beta = \nu \upharpoonright \beta = \rho$ et $\eta(\beta + 1) \neq \nu(\beta + 1)$, tel que $\rho \hat{\ } 0 = \eta \upharpoonright \beta + 1$, $\rho \hat{\ } 1 = \nu \upharpoonright \beta + 1$ et $\rho \in {}^\gamma 2$. Donc par définition de Γ , A et B , on a $D \models \varphi_0(\bar{x}_\eta, \bar{b}_{\eta \upharpoonright \gamma + 1})$, et $D \models \varphi_1(\bar{x}_\nu, \bar{b}_{\nu \upharpoonright \gamma + 1})$, comme $\bar{b}_{\eta \upharpoonright \gamma + 1} = \bar{b}_{\nu \upharpoonright \gamma + 1}$, (lemme 2). Alors $tp(\bar{a}_\eta / B) \neq tp(\bar{a}_\nu / B)$. Par suite on déduit que $|S(B)| \geq |{}^\mu 2| > \lambda$, alors que $|B| \leq \lambda$, d'où la non λ -stabilité de T . \square

3.3 Propriété de l'ordre positive et stabilité.

Dans cette sous-section on propose une notion d'ordre propre à la théorie des modèles positive : on définit l'ordre avec deux formules positives contradictoires. Cette notion d'ordre nous permettra comme dans la théorie des modèles usuelle de caractériser l'instabilité positive. La caractérisation se fera suivant deux chemins bien différents selon la nature de la théorie en question. Si la théorie est bornée, les lemmes 3 et 7 permettent de conclure rapidement grâce au caractère très particulier des théories bornées.

Dans le cas où la théorie est non bornée, le raisonnement est nettement plus compliqué. D'abord, on démontre que la propriété de l'ordre positive implique la non finitude du rang de Shelah (lemme 9). Ensuite on reprend le théorème 2.10 de [18] dans le cadre positif qui nous permettra de conclure (corollaire 6).

Définition 15 Soit T une théorie h -inductive dans un langage L . On dit qu'une L -formule positive $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ (avec $l(\bar{x}) = l(\bar{y}) = n$) définit un ordre, si il existe $\psi \in \text{Res}_T(\varphi(\bar{x}, \bar{y}))$, et une suite $(\bar{a}_i \mid i < \omega)$ de n -uples distincts dans un modèle de T tels que

$$\begin{cases} \varphi(\bar{a}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i < j \\ \psi(\bar{a}_i, \bar{a}_j) & \text{si } j < i. \end{cases}$$

On dit que le couple (φ, ψ) ordonne la suite $(\bar{a}_i \mid i < \omega)$.

La théorie T a la propriété de l'ordre, si il existe une formule positive dans le langage de T , qui définit un ordre sur un modèle de T .

Dans le reste, sauf mention contraire, nous utiliserons l'appellation "propriété de l'ordre" au lieu de "propriété de l'ordre positive".

Lemme 5 Soient T une théorie h -inductive, $(\varphi(\bar{x}, \bar{y}), \psi(\bar{x}, \bar{y}))$ un couple de formules positives (éventuellement $l(\bar{x}) \neq l(\bar{y})$) telles que $\psi \in \text{Res}_T(\varphi)$ et qu'il existe $\{(\bar{c}_i, \bar{a}_j) \mid i, j < \omega\}$ une suite d'uples dans un modèle de T telle que

$$\begin{cases} \varphi(\bar{c}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i < j \\ \psi(\bar{c}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Alors T a la propriété de l'ordre.

Preuve. Supposons qu'il existe $\{(\bar{c}_i, \bar{a}_j) \mid i, j < \omega\}$ une suite d'uples dans un modèle de T telle que

$$\begin{cases} \varphi(\bar{c}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i < j \\ \psi(\bar{c}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Soit θ la formule positive définie par $\theta((\bar{x}, \bar{x}'), (\bar{y}, \bar{y}')) \equiv \varphi(\bar{x}, \bar{y}')$, alors la formule θ' définie par $\theta'((\bar{x}, \bar{x}'), (\bar{y}, \bar{y}')) \equiv \psi(\bar{x}, \bar{y}')$ est contradictoire avec θ , en d'autres termes, $\theta' \in \text{Res}_T(\theta)$, et le couple de formules positives (θ, θ') ordonne la suite $\{(\bar{c}_i, \bar{a}_i) \mid i < \omega\}$. \square

Lemme 6 Soit T une théorie h -inductive sans la propriété de l'ordre. Alors pour tout couple de formules positives $(\varphi(\bar{x}, \bar{y}), \psi(\bar{x}, \bar{y}))$, avec $\psi \in \text{Res}_T(\varphi(\bar{x}, \bar{y}))$, il existe un entier naturel N (qui dépend du couple de formules) tel que pour tout modèle M de T , il n'existe pas $\{(\bar{c}_i, \bar{a}_j) \mid i, j \leq N\}$ dans M tel que :

$$(\star) \begin{cases} \varphi(\bar{c}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i < j \\ \psi(\bar{c}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Preuve. Par l'absurde supposons que pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $\{(\bar{c}_i, \bar{a}_j) \mid i, j \leq N\}$ dans un modèle de T tel que :

$$(\star) \begin{cases} \varphi(\bar{c}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i < j \\ \psi(\bar{c}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Alors par compacité positive il existe $\{(\bar{c}_i, \bar{a}_j) \mid i, j < \omega\}$ tel que :

$$(\star) \begin{cases} \varphi(\bar{c}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i < j \\ \psi(\bar{c}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Par le lemme 5, T a la propriété de l'ordre, contradiction. \square

Lemme 7 *Si T est une théorie h-inductive bornée, alors il n'a pas la propriété de l'ordre.*

Preuve. Supposons que T a la propriété de l'ordre. Alors, il existe A un pec de T et $(\bar{a}_i \mid i < \omega)$ une suite extraite de A ordonnée par un couple de formules (φ, ψ) tel que $\psi \in \text{Res}_T(\varphi)$. Ceci implique que la famille d'énoncés h-inductifs suivante est consistante :

$$T \cup \{\exists \bar{x}_i \bar{x}_j \varphi(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \wedge \psi(\bar{x}_j, \bar{x}_i) \mid i < j < \omega\}.$$

Par le théorème de compacité positive, on déduit que pour tout cardinal λ la famille d'énoncés suivante est consistante

$$T \cup \{\exists \bar{x}_i \bar{x}_j \varphi(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \wedge \psi(\bar{x}_j, \bar{x}_i) \mid i < j < \lambda\}.$$

Soient B un modèle de cette famille d'énoncés et $(\bar{b}_i \mid i < \lambda)$ une suite extraite de B ordonnée par le couple (φ, ψ) . Soit B_e un pec de T où B se continue par un homomorphisme f . Comme la suite $(\bar{b}_i \mid i < \lambda)$ est ordonnée par (φ, ψ) et que $\psi \in \text{Res}_T(\varphi)$, on déduit que pour tout $i, j < \lambda$,

$$f(\bar{b}_i) = f(\bar{b}_j) \Rightarrow \bar{b}_i = \bar{b}_j.$$

Ainsi, B_e est un pec de T de cardinal au moins λ . Ceci contredit que T est bornée. \square

Définition 16 *On appelle l'entier N du corollaire 6 le nombre d'alternance du couple $(\varphi(\bar{x}, \bar{y}), \psi(\bar{x}, \bar{y}))$, par rapport à T .*

Lemme 8 *Soit T une théorie h -inductive non bornée. Une formule $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ définit un ordre si et seulement si, pour tout ordinal α , il existe une suite $(\bar{a}_i : i < \alpha)$ dans un pec A de T qui vérifie :*

$$A \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{a}_j) \quad \text{si et seulement si} \quad i < j.$$

Preuve. On suppose d'abord que la formule $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ définit un ordre. Alors il existe une formule positive $\psi \in \text{Res}_T(\varphi)$ telle que la famille suivante est consistante

$$T \cup \{ \exists \bar{x}_i \bar{x}_j \varphi(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \wedge \psi(\bar{x}_j, \bar{x}_i) \mid i < j < \omega \}.$$

Par compacité positive on déduit que pour tout ordinal α la famille suivante est consistante

$$T \cup \{ \exists \bar{x}_i \bar{x}_j \varphi(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \wedge \psi(\bar{x}_j, \bar{x}_i) \mid i < j < \alpha \}$$

Soient A un modèle de cette famille d'énoncés inductifs et $(\bar{a}_i \mid i < \alpha)$ une suite extraite de A ordonnée par le couple de formules (φ, ψ) . Soit A_e un pec de T où A se continue. Comme $\psi \in \text{Res}_T(\varphi)$, l'image de $(\bar{a}_i \mid i < \alpha)$ dans A_e est de taille α et elle est ordonnée par le même couple de formules.

Maintenant montrons l'autre sens. Soient $\lambda = |\text{Res}_T(\varphi)|$ et $\alpha = \beth^+(\lambda)$, A un pec de T de cardinal $\geq \alpha$ et $(\bar{a}_i \mid i < \alpha)$ une suite de A tels que

$$A \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{a}_j) \quad \text{si et seulement si} \quad i < j < \alpha.$$

À tout couple (i, j) , on associe la formule positive $\psi_{ij} \in \text{Res}_T(\varphi)$ telle que $A \models \psi_{ij}(\bar{a}_{\max(i,j)}, \bar{a}_{\min(i,j)})$. Soit f l'application qui envoie $\{i, j\}$ vers ψ_{ij} . Par le théorème d'Erdős-Rado (théorème 2), il existe $\psi \in \text{Res}_T(\varphi)$ et $(\bar{a}_i \mid i < \lambda)$ une suite extraite de la suite $(\bar{a}_i \mid i < \alpha)$ telle que

$$\begin{cases} A \models \varphi(\bar{a}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i < j \\ A \models \psi(\bar{a}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Ainsi le couple (φ, ψ) ordonne la suite $(\bar{a}_i; i < \lambda)$. \square

Le lemme suivant est une adaptation du lemme 2.14 [10] au contexte positif. Il affirme que avoir la propriété de l'ordre implique que le rang est infini.

Lemme 9 *Soient T une théorie h -inductive et complète. (φ_0, φ_1) un couple de formules contradictoires qui ordonne une suite dans un modèle de T . Alors $R(\bar{x} = \bar{x}, \varphi_0, \varphi_1) \geq \omega$.*

Preuve. Soit $(\bar{a}_i | i < \omega)$ une suite d'un modèle A de T . Soient $n \in \mathbb{N}$ et ψ une formule positive telles que $A \models \psi(\bar{a}_i)$, pour tout $i < 2^n$. Alors nous affirmons que $R(\psi, \varphi_0, \varphi_1) \geq n$. En effet par induction, supposons le résultat vrai pour n . Montrons qu'il est vrai pour $n + 1$. Supposons que $A \models \psi(\bar{a}_i)$ pour tout $i < n + 1$ et

$$\begin{cases} i < j \Rightarrow A \models \varphi_0(\bar{a}_i, \bar{a}_j) \\ i > j \Rightarrow A \models \varphi_1(\bar{a}_i, \bar{a}_j). \end{cases}$$

Alors la formule $\psi(\bar{x}) \wedge \varphi_0(\bar{a}_{2^n}, \bar{x})$ est réalisé par tous les $(\bar{a}_i | 2^n < i \leq 2^{n+1})$, et de même la formule $\psi(\bar{x}) \wedge \varphi_1(\bar{a}_{2^n}, \bar{x})$ est réalisée par tous les $(\bar{a}_i : 0 \leq i < 2^n)$. Par hypothèse d'induction on obtient que :

$$\begin{cases} R(\psi(\bar{x}) \wedge \varphi_0(\bar{a}_{2^n}, \bar{x}), \varphi_0, \varphi_1) \geq n \\ R(\psi(\bar{x}) \wedge \varphi_1(\bar{a}_{2^n}, \bar{x}), \varphi_0, \varphi_1) \geq n. \end{cases}$$

Ainsi par définition du rang on a $R(\psi, \varphi_0, \varphi_1) \geq n + 1$.

Comme pour tout $i < \omega$, la formule $\bar{x} = \bar{x}$ est réalisé par tous les \bar{a}_i , donc $R(\bar{x} = \bar{x}, \varphi_0, \varphi_1) \leq n$ pour tout n , et par suite $R(\bar{x} = \bar{x}, \varphi_0, \varphi_1) \geq \omega$. \square

Dans le reste de cette section, on montrera l'équivalence entre l'instabilité et la propriété de l'ordre positive, pour cela on commence par rappeler et introduire les outils dont on aura besoin.

Définition 17 Soit T une théorie h -inductive. Soient B un pec de T , A une partie de B , et φ une L -formule positive. On note $S_\varphi^m(A)$ l'ensemble des m -types de $S(A)$ qui représentent la formule φ , en d'autres termes $p \in S_\varphi^m(A)$ tel que $p \vdash \varphi$.

Soit $\bar{a} \in A$, on note par $tp_\varphi(\bar{a}/B)$ la famille des formules positives $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ telles que $\bar{b} \in B$ et $A \models \varphi(\bar{a}, \bar{b})$.

Une théorie h -inductive complète et non bornée est dite φ -instable s'il existe A un pec de T tel que $|S_\varphi(A)| > |A|$.

Définition 18 Soient T une théorie h -inductive, A un pec de T , ψ, φ deux L -formules positives $p \in S_n(A)$, et $B \subset A$. On dit que le type p est (ψ, φ) -sindé sur B s'il existe \bar{a}, \bar{c} deux uples de A tels que

1. $tp_\psi(\bar{a}/B) = tp_\psi(\bar{c}/B)$;
2. $p \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a})$ et $p \not\vdash \varphi(\bar{x}, \bar{c})$

Lemme 10 Soit T une théorie h -inductive instable, alors il existe φ , une L -formule positive φ telle que la théorie T est φ -instable.

Preuve. Comme T n'est pas stable, par le lemme 3 on déduit que pour tout cardinal $\lambda \geq \max(|L|; \aleph_0)$ il existe A un pec de T et $n \in \mathbb{N}$ tel que $|A| = \lambda$ et $|S_n(A)| > |A|$. Soit f une application de $S_n(A)$ dans l'ensemble des formules positives qui à chaque n -type p associe une L-formule $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ telle que $p \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a})$ avec $\bar{a} \in A$.

Comme $|S_n(A)| \geq |L|^+$ on déduit qu'il existe Σ une partie de $S_n(A)$ de taille $> |A|$, et φ une formule positive telles que $f(\Sigma) = \varphi$. Ainsi on obtient le résultat

$$|S_\varphi(A)| > |A|.$$

□

Corollaire 5 *Une théorie h-inductive T complète est instable si et seulement si il existe une formule positive φ telle que T soit φ -instable.*

Le théorème suivant est la version positive du théorème 2.10 de [18]. C'est l'outil principal pour montrer que l'instabilité implique la propriété de l'ordre. Comme l'étude de la stabilité positive se fait dans la classe des pec d'une théorie h-inductive complète, le théorème de compacité positive est inefficace. En effet, ce théorème ne permet pas de contrôler le modèle dans lequel vit les réalisations d'un ensemble d'énoncés h-inductifs consistant avec la théorie. Par conséquent, dans le cas où la théorie n'est pas bornée, nous sommes contraints à utiliser les techniques de la combinatoire des cardinaux. La preuve du théorème suivant est une illustration de cet usage.

Théorème 3 ([18], théorème 2.10) *Soient T une théorie h-inductive complète, φ une L-formule positive, et A un pec de T . Supposons que $|S_\varphi(A)| > \sum_{0 \leq \mu < \lambda} |A|^\mu + 2^{2^\mu}$, où λ est un cardinal tel que $\lambda \rightarrow (\chi)_2^2$ et χ un cardinal. Alors il existe θ une formule positive et $(\bar{d}_i | i < \chi)$ une suite dans un pec A de T , telle que $A \models \theta(\bar{d}_i, \bar{d}_j)$ si et seulement si $i < j$.*

Preuve. Soient A un pec de T et $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ une L-formule positive (avec $l(\bar{x}) = m, l(\bar{y}) = n$) tels que $|S_\varphi(A)| > |A| = \kappa$ où $\kappa = \sum_{0 \leq \mu < \lambda} |A|^\mu + 2^{2^\mu}$. Soit $(c^i | i < \kappa^+)$ une suite de réalisations des types de $S_\varphi(A)$ dans un pec assez large. Posons $\psi(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi(\bar{y}, \bar{x})$. Définissons par induction sur $\alpha \leq \lambda$ une suite croissante de pec A_α tels que

- $A_0 = A$,
- Pour β limite, $A_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} A_\alpha$

Pour définir $A_{\alpha+1}$ on procède comme suit : pour tout $p \in S_\varphi^m(A_\alpha) \cup S_\psi^n(A_\alpha)$ et $B \subset A_\alpha$ tel que $|B| < |\alpha|^+ + \aleph_0$, $A_{\alpha+1}$ est le pec engendré par les réalisations $p \upharpoonright B$.

Montrons que $|A_\alpha| \leq |A|^{\lfloor \alpha+1 \rfloor}$, par induction sur $\alpha < \lambda$. Supposons le résultat vrai pour α , et montrons qu'il est vrai pour $\beta = \alpha+1$. En effet comme $|S_\varphi^m(B) \cup S_\psi^n(B)| \leq 2^{|B|}$ et le nombre de choix d'ensembles de cardinal $\leq |\alpha| + \aleph_0$ de A_α est inférieur à $|A_\alpha|^{\lfloor \alpha \rfloor + \aleph_0}$, on déduit que $|A_\beta| \leq |A_\alpha|^{\lfloor \alpha \rfloor + \aleph_0} \cdot 2^{\lfloor \alpha \rfloor + \aleph_0}$. Par hypothèse d'induction, $|A_{\alpha+1}| \leq |A|^{\lfloor \alpha+1 \rfloor \cdot (\lfloor \alpha \rfloor + \aleph_0)} \cdot 2^{\lfloor \alpha \rfloor + \aleph_0}$. Ainsi $|A_\beta| \leq |A|^{\lfloor \beta+1 \rfloor}$. De même on remarque que $|A_\lambda| \leq \kappa$.

Maintenant montrons la proposition suivante :

(Λ) Il existe $i < \kappa^+$ tel que pour tous $\alpha < \lambda$ et $B \subset A_\alpha$; $|B| < |\alpha|^+ + \aleph_0$, $tp(c^i / A_{\alpha+1})$ est (ψ, φ) -sindé sur B .

Preuve de (Λ) : Par l'absurde, supposons que pour tout $i < \kappa^+$ il existe $\alpha_i < \lambda$, $B_i \subset A_{\alpha_i}$ de cardinal $< |\alpha_i|^+ + \aleph_0$ tels que $tp(c^i / A_{\alpha_i+1})$ n'est pas (ψ, φ) -scindé sur B_i .

Comme à tout $i < \kappa^+$ on associe un ordinal $\alpha_i < \lambda \leq \kappa$ et que $cf(\kappa^+) = \kappa^+$, on déduit qu'il existe un sous-ensemble Γ de la famille $(c^i | i < \kappa^+)$ de cardinal κ^+ tel que pour tout $c^i \in \Gamma$, $\alpha_i = \alpha < \lambda$.

De même comme le nombre des parties B de A_α telles que $|B| < |\alpha|^+ + \aleph_0$ est au plus κ , alors il existe B et $\Gamma' \subset \Gamma$ de cardinal κ^+ tel que pour tout $c^i \in \Gamma'$, $tp(c^i / A_{\alpha+1})$ n'est pas (ψ, φ) -scindé sur B .

Dans la suite B et α sont ceux trouvés dans les paragraphes précédents.

Soit $\mu = |B|^m \leq |\alpha| + \aleph_0 \leq \lambda$, par définition de $|A_{\alpha+1}|$ il existe $C \subset A_{\alpha+1}$ qui réalise tous les types de $S_\psi^m(B)$, donc $|C| \leq 2^\mu$, par suite $|S_\varphi^n(C)| \leq 2^{|C|} \leq 2^{2^\mu} \leq \kappa$. Par le même raisonnement que précédemment il existe $p \in S_\varphi^n(C)$ et $\Gamma'' \subset \Gamma'$ de cardinal κ^+ tels que pour tout $c^i \in \Gamma''$ $tp_\varphi(c^i / C) = p$.

Dans toute la suite les c^i choisis sont dans Γ'' .

Comme $tp_\varphi(c^0 / A) \neq tp_\varphi(c^1 / A)$ il existe $\bar{a} \in A$ tel que

$$(\star) \begin{cases} tp_\varphi(c^0 / A) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \\ tp_\varphi(c^1 / A) \not\vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}). \end{cases}$$

Par définition de C il existe $\bar{a}' \in C$ tel que $tp_\psi(\bar{a} / B) = tp_\psi(\bar{a}' / B)$. Comme pour tout $i < \kappa^+$, $tp(c^i / A_{\alpha+1})$ ne (ψ, φ) -split pas sur B , en particulier pour $i = 0, 1$, et que $tp_\psi(\bar{a} / B) = tp_\psi(\bar{a}' / B)$, pour $i = 0, 1$ on a

$$(\Lambda\Lambda) \quad tp(c^i / A_{\alpha+1}) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \text{ si et seulement si } tp(c^i / A_{\alpha+1}) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}')$$

du fait que $tp(c^0 / A_{\alpha+1}) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a})$ on obtient que $tp(c^0 / A_{\alpha+1}) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}')$. Comme pour tout c^i dans Γ'' $tp(c^i / C) = p$ alors $tp(c^0 / C) = tp(c^1 / C)$, et comme $tp(c^0 / A_{\alpha+1}) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}')$ alors $tp(c^1 / C) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}')$, ce qui implique $tp(c^1 / A_{\alpha+1}) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}')$. Ainsi par ($\Lambda\Lambda$) on obtient $tp(c^1 / A_{\alpha+1}) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a})$, ce qui contredit (\star). Ainsi on a démontré (Λ).

Dans toute la suite posons A^* la limite inductive de la suite A_α où $\alpha \leq \lambda$

Maintenant par induction sur $\alpha < \lambda$ on définit une suite de $(\bar{a}_\alpha, \bar{b}_\alpha, \bar{c}_\alpha) \in A_{2\alpha+2}$ comme suit. Supposons que pour tout $\beta < \alpha$, $(\bar{a}_\beta, \bar{b}_\beta, \bar{c}_\beta)$ sont définies. Soit $B_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \bar{a}_\beta \hat{\ } \bar{b}_\beta \hat{\ } \bar{c}_\beta$. D'après (Λ) le type $tp(c^i / A_{2\alpha+1})$ est (ψ, φ) -split sur B_α . Alors il existe $\bar{a}_\alpha, \bar{b}_\alpha \in A_{2\alpha+1}$ tels que $tp_\psi(\bar{a}_\alpha, B_\alpha) = tp_\psi(\bar{b}_\alpha, B_\alpha)$ et

$$\begin{cases} tp(c^i / A_{2\alpha+1}) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}_\alpha) \\ tp(c^i / A_{2\alpha+1}) \not\vdash \varphi(\bar{x}, \bar{b}_\alpha). \end{cases}$$

On prend $c_\alpha \in A_{2\alpha+2}$ qui par définition de $A_{2\alpha+2}$ réalise $tp(c^i / B_\alpha \cup \{\bar{a}_\alpha, \bar{b}_\alpha\})$. Ainsi on a $A^* \models \varphi(\bar{c}_\alpha, \bar{a}_\alpha)$ et $A^* \models \neg \varphi(\bar{c}_\alpha, \bar{b}_\alpha)$. On remarque que pour tous $\alpha \leq \beta < \lambda$ on a

$$(*) \begin{cases} A^* \models \varphi(\bar{c}_\beta, \bar{a}_\alpha) \\ A^* \models \neg \varphi(\bar{c}_\beta, \bar{b}_\alpha). \end{cases}$$

Soit f l'application coloriage de λ définie par : pour tous $\alpha, \beta < \lambda$

$$f(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{si } A^* \models \varphi(\bar{c}_{\min(\alpha, \beta)}, \bar{a}_{\max(\alpha, \beta)}) \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme par hypothèse on a $\lambda \rightarrow (\chi)_2^2$ alors il existe $H \subset \lambda$ de taille χ telle que $f \upharpoonright H^2$ est constante. Supposons que $f(H^2) = 1$ si $\alpha, \beta \in H$, alors d'après l'hypothèse $f(H^2) = 1$ et (*), on a $A^* \models \neg \varphi(\bar{c}_\alpha, \bar{a}_\beta)$ si et seulement si $\alpha < \beta$. Maintenant si $f(H^2) = 0$, alors pour tous $\alpha < \beta < \lambda$ on a $A^* \models \varphi(\bar{c}_\alpha, \bar{a}_\beta)$, comme \bar{a}_α et \bar{b}_α ont le même type sur B_α et $\bar{c}_\beta \in B_\alpha$ alors on a pour tous $\alpha < \beta < \lambda$, $A^* \models \varphi(\bar{c}_\alpha, \bar{b}_\beta)$. Ainsi et d'après (*) on déduit que dans le cas où $f(H^2) = 0$

$$A^* \models \varphi(\bar{c}_\alpha, \bar{b}_\beta) \quad \text{si et seulement si} \quad \alpha < \beta$$

Par conséquent la formule positive θ définie par $\theta((\bar{x}, \bar{x}'), (\bar{y}, \bar{y}')) \equiv \varphi(\bar{x}, \bar{y}')$ ordonne la suite $(\bar{c}_\alpha, \bar{a}_\alpha)$, où $\alpha, \beta \in H$. \square

Corollaire 6 *Si T est une théorie h -inductive complète non bornée et instable, alors elle a la propriété de l'ordre.*

Preuve. Pour pouvoir appliquer le théorème 3 et comme T est instable on prend $\lambda \rightarrow (\chi)_2^2$, avec $\chi = \beth^+(T)$, et $\lambda = (2^{\beth^+(T)})^+$.

Il existe A un pec de T de cardinal $\kappa = 2^{2^\lambda}$, et φ une formule positive tels que $|S_\varphi(A)| > |A| = \kappa$ et $\kappa = \sum_{0 \leq \mu < \lambda} |A|^\mu + 2^{2^\mu}$.

Ainsi par le théorème 3, il existe $\theta(\bar{x}, \bar{y})$ une formule positive et $(\bar{a}_\alpha, \alpha < \beth^+(T))$ une suite ordonnée par θ . Donc pour tout $\beta < \alpha < \beth^+(T)$, \models

$\neg\theta(\bar{a}_\alpha, \bar{a}_\beta)$ donc il existe $\theta_{\alpha,\beta}$ une formule positive dans la résultante de θ telle que $\models \theta_{\alpha,\beta}(\bar{a}_\alpha, \bar{a}_\beta)$. Soit l'application coloriage f de $\mathfrak{I}^+(T)$ définie comme suit : Pour tous $\alpha, \beta < \mathfrak{I}^+(T)$, $f(\{\alpha, \beta\}) = \theta_{\max(\alpha,\beta), \min(\alpha,\beta)}$ comme le cardinal de la résultante est inférieur à $|T|$ ou $(|L|)$, alors par le théorème de Erdős-Rado il existe une suite de taille infinie et θ' telle que pour tout $\{\alpha, \beta\}$ de la nouvelle suite on a $f(\{\alpha, \beta\}) = \theta'$. Ainsi le couple (θ, θ') définit l'ordre cherché. \square

Corollaire 7 *Soit T une théorie h -inductive complète. Alors T est stable si et seulement si elle n'a pas la propriété de l'ordre.*

Preuve. La preuve se divise en deux cas, suivant si T est bornée ou non.

Supposons d'abord que T est non bornée. Si T a la propriété de l'ordre, par le lemme 9 il existe un couple de formules contradictoires (φ_0, φ_1) telles que $R(x = x, \varphi_0, \varphi_1) \geq \omega$, ce qui implique par le lemme 4 que T est instable. L'autre direction découle directement du corollaire 6.

Dans le cas où la théorie est bornée la conclusion découle des lemmes 3 et 7. \square

3.4 Autres caractérisations

Dans [3] Ben Yaacov a étudié et caractérisé la stabilité positive par la finitude du rang de Shelah et la type-définissabilité des types (définition 19). Dans le fait 9, on rappelle les caractérisations données par Ben Yaacov, avec leurs démonstrations.

Définition 19 ([3]) *Soient $p(\bar{x}) \in S(A)$ un type à paramètres dans un pec A de T et $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ une formule positive. On dit que $p(\bar{x})$ est φ -définissable si il existe $q_\varphi(\bar{y})$ un type partiel avec paramètres dans A qui contient au plus $|T|$ L -formules, tel que*

$$p \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \quad \text{si et seulement si} \quad A \models q_\varphi(\bar{b})$$

On note aussi le type partiel q_φ par $dp(\varphi)$. Un type p est dit définissable si il est φ -définissable pour toute formule positive φ .

Fait 9 ([3]) *Soit T une théorie h -inductive, complète. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour toute formule positive φ et pour tout $\psi \in \text{Res}_T(\varphi)$, $R(\bar{x} = \bar{x}, \varphi, \psi) < \omega$.*

2. Pour tout pec A de T , tous les types de $S(A)$ sont définissables.
3. Pour tout pec A , $|S(A)| \leq (|A| + |T|)^{|T|}$.
4. Il existe un cardinal λ tel que T est λ -stable.

Lemme 11 *Soit T une théorie h-inductive complète et stable, soit A un pec de T . Alors la théorie $Tk(A)$ et ses compagnes sont stables.*

Preuve. Soit B un pec de la théorie complète $Tk(A)$. Alors B est aussi un pec de T . D'après le fait 9 on a $|S(B)| \leq (|B| + |T|)^{|T|}$, ce qui nous permet de conclure que la théorie $Tk(A)$ est stable (fait 9). \square

3.5 Une comparaison entre les stabilités positive et usuelle.

Dans cette section nous étudions un exemple d'une structure qui est stable positivement et qui ne l'est pas au sens de la théorie des modèles usuelle.

Soient $M_1 = (\mathbb{Q}, \leq)$ dans le langage $L_1 = \{c_q \mid (q \in \mathbb{Q}), \leq\}$. Comme la structure M_1 est bornée, elle est stable (lemme 3). Remarquons aussi qu'elle est instable au sens de la théorie des modèles usuelle puisqu'on peut ordonner un ensemble infini. Soient M_2 un pec d'une théorie h-inductive complète non bornée et positivement stable (Par exemple la théorie des corps de caractéristique fixée), et L_2 le langage de la théorie de M_2 augmenté en ajoutant un symbole de constante pour chaque élément de M_2 .

Soit L^* la réunion de L_1 et L_2 à laquelle nous ajoutons deux symboles relationnels m_1, m_2 . Soit T la théorie h-inductive formée par $Tk(M_1) \cup Tk(M_2)$ et l'ensemble des énonces h-inductifs

$$\begin{aligned} & \{\neg \exists x m_1(x) \wedge m_2(x), \forall x m_1(x) \vee m_2(x)\} \\ & \cup \{m_1(a) : a \in M_1\} \cup \{m_2(b) : b \in M_2\}. \end{aligned}$$

Une L^* -formule positive est une combinaison booléenne de formules de la forme $(\varphi(\bar{x}) \wedge m_1(\bar{x})) \wedge (\psi(\bar{y}) \wedge m_2(\bar{y}))$ et $(\varphi'(\bar{x}) \wedge m_1(\bar{x})) \vee (\psi'(\bar{y}) \wedge m_2(\bar{y}))$ où φ, φ' des L_1 -formules et ψ, ψ' des L_2 -formules positives et pour $i = 1, 2$, $m_i(\bar{z}) \equiv \bigwedge_{z_j \in \bar{z}} m_i(z_j)$. Dans la suite nous notons la formule $(\varphi(\bar{x}) \wedge m_1(\bar{x})) \wedge (\psi(\bar{y}) \wedge m_2(\bar{y}))$ par $(\varphi(\bar{x}) \wedge \psi(\bar{y}))$ et la formule $(\varphi'(\bar{x}) \wedge m_1(\bar{x})) \vee (\psi'(\bar{y}) \wedge m_2(\bar{y}))$ par $(\varphi'(\bar{x}) \vee \psi'(\bar{y}))$.

Les modèles de la théorie T sont de la forme $N_1 \cup N_2$ avec $N_1 \models Tk(M_1)$ et $N_2 \models Tk(M_2)$ et $N_1 \cup N_2 \models \varphi(\bar{n}_1) \wedge \psi(\bar{n}_2)$ si et seulement si $N_1 \models \varphi(\bar{n}_1)$ et $N_2 \models \psi(\bar{n}_2)$, et $N_1 \cup N_2 \models \varphi(\bar{n}_1) \vee \psi(\bar{n}_2)$ si et seulement si $N_1 \models \varphi(\bar{n}_1)$

ou $N_2 \models \psi(\bar{n}_2)$. Ceci nous permet de déduire qu'une application de $N_1 \cup N_2$ dans un modèle de T est un homomorphisme si et seulement si les restrictions de f sur N_1 et N_2 sont des homomorphismes.

Lemme 12 *Soit $N = N_1 \cup N_2$ un modèle de T , alors N est un pec de T si et seulement si N_1 et N_2 sont respectivement des pec de $Tk(M_1)$ et $Tk(M_2)$*

Preuve. Soit $N = N_1 \cup N_2$ avec N_1 un pec de $Tk(M_1)$ et N_2 un pec de $Tk(M_2)$, et soit f un homomorphisme de N dans un modèle $M = N'_1 \cup N'_2$ de T . Supposons que $M \models \varphi(f(\bar{n}_1)) \wedge \psi(f(\bar{n}_2))$, avec $\bar{n}_1 \in N_1$ et $\bar{n}_2 \in N_2$. Comme N_1 et N_2 sont des pec, les restrictions de f à N_1 et N_2 sont des immersions. Ainsi $N \models \varphi(\bar{n}_1) \wedge \psi(\bar{n}_2)$. Ce qui implique que f est une immersion et par suite N est un pec de T .

Inversement supposons que N est un pec de T . Pour $i = 1, 2$, soit f_i un homomorphisme de N_i dans N'_i un modèle de $Tk(M_i)$ alors $f = f_1 \cup f_2$ est un homomorphisme de N dans $N' = N'_1 \cup N'_2$. Comme N est un pec de T on déduit que f est une immersion ce qui implique que f_1 et f_2 sont des immersions. Ainsi N_1 est un pec de $Tk(M_1)$ et N_2 un pec de $Tk(M_2)$. \square

Lemme 13 *La théorie T est complète et non bornée.*

Preuve. En effet, comme la théorie $Tk(M_2)$ n'est pas bornée, pour tout cardinal α il existe N_2 un pec de $Tk(M_2)$ de cardinal $\geq \alpha$. Ainsi $M_1 \cup N_2$ est un pec de T est de cardinal $\geq \alpha$, ce qui implique que T est non bornée. \square

Proposition 1 *La théorie T est positivement stable.*

Preuve. Supposons que la théorie T est instable. D'après le corollaire 7 il existe $N = N_1 \cup N_2$ un pec de T , et une suite $(\bar{n}_i, i < \omega)$ de N ordonnée par un couple de formules positives (φ, ψ) avec $\psi \in Res_T(\varphi)$.

Tout élément \bar{n}_i est de la forme (\bar{a}_i, \bar{b}_i) où $\bar{a}_i \in N_1$ et $\bar{b}_i \in N_2$, et la formule positive φ vérifie

$$\varphi((\bar{a}_i, \bar{b}_i), (\bar{a}_j, \bar{b}_j)) \equiv \varphi_1(\bar{a}_i, \bar{a}_j)(C) \varphi_2(\bar{b}_i, \bar{b}_j)$$

respectivement

$$\psi((\bar{a}_i, \bar{b}_i), (\bar{a}_j, \bar{b}_j)) \equiv \psi_1(\bar{a}_i, \bar{a}_j)(C) \psi_2(\bar{b}_i, \bar{b}_j)$$

avec φ_i (resp ψ_i) des formules positives dans le langage de la théorie $Tk(M_i)$ pour $i = 1, 2$ et $C \in \{\wedge, \vee\}$.

Supposons que $C = \vee$, alors $\varphi((\bar{a}_i, \bar{b}_i), (\bar{a}_j, \bar{b}_j)) \equiv \varphi_1(\bar{a}_i, \bar{a}_j) \vee \varphi_2(\bar{b}_i, \bar{b}_j)$, et $\psi((\bar{a}_i, \bar{b}_i), (\bar{a}_j, \bar{b}_j)) \equiv \psi_1(\bar{a}_i, \bar{a}_j) \wedge \psi_2(\bar{b}_i, \bar{b}_j)$ avec $\psi_i \in \text{Res}_T(\varphi_i)$ pour $i = 1, 2$. Comme d'une part, on peut extraire de la suite de départ une sous suite $((\bar{a}_i, \bar{b}_i), i < \omega)$ telle que pour tous $i < j$ on a soit $N_1 \models \varphi_1(\bar{a}_i, \bar{a}_j)$ soit $N_2 \models \varphi_2(\bar{b}_i, \bar{b}_j)$. Et d'autre part, on a pour tout $i < j$, $N_1 \models \psi_1(\bar{a}_j, \bar{a}_i)$ et $N_2 \models \psi_2(\bar{b}_j, \bar{b}_i)$. On aboutit alors à l'une des deux conclusions suivantes : soit on ordonne positivement définissablement un ensemble infini de N_1 ; soit on ordonne positivement définissablement un ensemble infini de N_2 . Chaque possibilité mène à une contradiction car on sait que M_1 et M_2 sont positivement stables.

On refait le même raisonnement dans le cas où $C = \wedge$ c'est à dire

$$\varphi((\bar{a}_i, \bar{b}_i), (\bar{a}_j, \bar{b}_j)) \equiv \varphi_1(\bar{a}_i, \bar{a}_j) \wedge \varphi_2(\bar{b}_i, \bar{b}_j) .$$

Ainsi on déduit que la théorie T est positivement stable. \square

On remarque que la théorie $\text{Th}(M_1 \cup M_2)$ dans le cadre de la théorie des modèles usuelle est instable puisque la structure M_1 s'ordonne définissablement.

3.6 Conséquences de la stabilité

Dans la première partie de cette section on étudie l'existence, le nombre des extensions et des restrictions spéciales d'un types dans une théorie h-inductive stable.

Dans la deuxième partie on propose un encadrement topologique de la type-définissabilité (définition 19) donné dans la caractérisation de la stabilité (fait 9).

Définition 20 Soient T une théorie h-inductive, B un pec de T de cardinal $\geq \lambda$, et $p \in S(B)$. On dit que p est λ -spécial, si et seulement si il existe, $A \subset B$, de cardinal au plus λ qui vérifie la propriété suivante :

Pour tous \bar{a}, \bar{b} , des uples de B , tels que $\text{tp}(\bar{a}/A) = \text{tp}(\bar{b}/A)$, et toute formule positive φ

$$p \vdash \varphi(x, \bar{a}) \Leftrightarrow p \vdash \varphi(x, \bar{b}).$$

Dans ce cas on dit que p est λ -spécial sur A .

On dit que p est A -spécial, si il est $|A|$ -spécial sur A .

Lemme 14 Soient T une théorie h-inductive, M, N et P trois pec de T tels que $M \subset N \subset P$ et N réalise tous les types de $S(M)$. Soit $p \in S_n(N)$ qui est M -spécial, alors il existe un unique un fils $q \in S_n(P)$ de p qui est M -spécial.

Preuve. Soit Γ l'ensemble des formules positives, $\varphi(\bar{x}, \bar{d})$ avec $\bar{d} \in P$, telles qu'il existe $\bar{a} \in N$ de même type sur M que \bar{d} (ie $tp(\bar{d}/M) = tp(\bar{a}/M)$) et que $p \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a})$. Montrons que Γ est un type de $S_n(P)$. Pour cela on va montrer que $\Gamma \cup Tu(P)$ est consistant, ensuite on montrera que Γ est une famille maximale de formules positives.

$\Gamma \cup Tu(P)$ est consistant : En effet un fragment fini Σ de cette famille est de la forme $\{\neg\exists\bar{y}\varphi(\bar{y}, \bar{d}, \bar{m}), \psi(\bar{x}, \bar{d}, \bar{m})\}$, avec φ, ψ des formules positives, $\bar{d} \in P$, $\bar{m} \in M$, $\neg\exists\bar{y}\varphi(\bar{y}, \bar{d}, \bar{m}) \in Tu(P)$, et $\psi(\bar{x}, \bar{d}, \bar{m}) \in \Gamma$. Soit r le type de \bar{d} sur M . Comme N satisfait tous les types à paramètres dans M , il existe $\bar{n} \in N$ qui réalise r . Ainsi si on interprète \bar{d} par \bar{n} , alors il existe $\bar{a} \in N$ tel que $N \models \psi(\bar{a}, \bar{n}, \bar{m})$ et $N \vdash \neg\exists\bar{y}\varphi(\bar{y}, \bar{n}, \bar{m})$. Ainsi N réalise Σ . D'où la consistance de $\Gamma \cup Tu(P)$.

Montrons la maximalité de Γ . Soit $\varphi(\bar{x}, \bar{d})$ une formule positive, avec $\bar{d} \in P$, qui n'appartient pas à Γ . Soit $\bar{n} \in N$ un uple qui a le même type sur M que \bar{d} . Par définition de Γ , on déduit que $p \vdash \neg\varphi(\bar{x}, \bar{n})$, ce qui implique l'existence d'une formule positive $\psi(\bar{x}, \bar{y}) \in Res_{Tu(M)}(\varphi(\bar{x}, \bar{y}))$ à paramètres dans M telle que $p \vdash \psi(\bar{x}, \bar{n})$. Par définition de Γ on déduit que $\psi(\bar{x}, \bar{d}) \in \Gamma$, d'où la maximalité de Γ . Par conséquence Γ est un fils M -spécial de p .

D'autre part, on remarque que si Γ' est un autre fils M -spécial de p , alors il contient par définition Γ , et comme Γ est maximal on a égalité. \square

Lemme 15 *Soit T une théorie h -inductive complète non bornée et λ -stable. Soient M, N deux pec de T tels que $|M| \leq \lambda$ et N réalise tous les types de $S(M)$, alors*

$$|\{p \in S(N) \mid p \text{ est } M\text{-spécial}\}| \leq \lambda$$

Preuve. Comme T est λ -stable, $|M| \leq \lambda$ et que N réalise tous les types de $S(M)$, il existe N^* un pec de T de cardinal λ qui réalise tous les types de $S(M)$ et tel que $M \subset N^* \subset N$.

Soit $p \in S(N)$ un type M -spécial, alors $q = p \upharpoonright N^*$ est M -spécial, et d'après le lemme 14, p est l'unique fils de q qui est M -spécial. Comme $|N^*| \leq \lambda$, on déduit que

$$|\{p \in S(N) \mid p \text{ est } M\text{-spécial}\}| \leq \lambda$$

\square

Dans [17] Shelah introduit une notion de la stabilité dans les cas qui s'adapte au contexte positif et permet d'obtenir des conditions nécessaires. Le théorème suivant est un exemple dont la démonstration que nous proposons n'utilise que des notions qui sont propre à la théorie des modèles positives

Théorème 4 Soient T une théorie h -inductive μ -stable, M un pec de T et $p \in S(M)$. Il existe N un pec de T de cardinal $\leq \mu$ tel que $N \prec_+ M$, et p est N -spécial.

Preuve. Soit χ le cardinal défini par

$$\chi = \min\{\alpha \mid 2^\alpha > \mu, \alpha \leq \mu\}$$

Supposons que p n'est pas N -spécial pour aucun pec $N \subset M$ de cardinal $\leq \mu$. Par induction on construit une suite $(M_\alpha, N_{i\alpha}; i = 1, 2; \alpha \leq \chi)$ telle que pour tout $\alpha \leq \chi$ et $i = 1, 2$ on a :

- $M_\alpha, N_{i\alpha}$ sont des pec de T inclus dans M ,
- $\max(|M_\alpha|, |N_{i\alpha}|) \leq \mu$,
- $M_\alpha \subset N_{i\alpha} \subset M_{\alpha+1}$

Posons M_0 un pec de T de cardinal au plus μ et qui est inclus dans M . Comme par hypothèse p n'est pas M_0 -spécial, ils existent $\bar{a}_i, i = 1, 2$ deux uples de M qui ont le même type sur M_0 et tels que $p \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}_1)$ et $p \not\vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}_2)$. Supposons que la suite est construite jusqu'au α , par amalgamation soit $M_{\alpha+1}$ l'amalgamé des $N_{i\alpha}; i = 1, 2$ sur la base M_α et qui est de cardinal $\leq \mu$. (ie le diagramme commutatif suivant est donné par l'amalgamation des pec)

$$\begin{array}{ccc} M_\alpha & \xrightarrow{h_\rho} & N_{1\alpha} \\ i_\alpha \downarrow & & \downarrow im \\ M_{2\alpha} & \xrightarrow{\bar{h}_\rho} & P_\alpha \end{array}$$

Comme p n'est pas $M_{\alpha+1}$ -spécial, il existe $\bar{a}_{i,\alpha+1}; i = 1, 2$ des uples de M tels que $p \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}_{1,\alpha+1})$ et $p \not\vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}_{2,\alpha+1})$. Soit $N_{i,\alpha+1}$ le pec de T engendré par $M_{\alpha+1} \cup \{\bar{a}_{i,\alpha+1}\}$ (le lemme ??), pour $i = 1, 2$. Ainsi on a construit la suite $(M_\alpha, N_{i\alpha}; i = 1, 2; \alpha \leq \chi)$

A partir de la suite $(M_\alpha; N_{i\alpha}; \alpha \leq \chi, i = 1, 2)$ on va construire une deuxième suite $(M_\alpha^*, h_\rho, \alpha \leq \chi, \rho \in {}^\alpha 2)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- pour tout $\alpha \leq \chi$, M_α^* est un pec de T de cardinal $\leq \mu$,
- $\alpha \leq \beta \implies M_\alpha^* \prec_+ M_\beta^*$,
- pour tout ordinal limite $\alpha \leq \chi$, $M_\alpha^* = \bigcup_{\gamma \leq \alpha} M_\gamma^*$,
- pour tout $\rho \in {}^\alpha 2$, $h_\rho : M_\alpha \longrightarrow M_\alpha^*$ est un homomorphisme (immersion),
- $\alpha < \beta \leq \chi$ et $\rho \in {}^\beta 2 \implies h_{\rho|_\alpha} \subseteq h_\rho$,
- si $\beta = \alpha + 1$ et $\rho \in {}^\beta 2 \implies h_{\rho \hat{\ } 0}(N_{1\alpha}) = h_{\rho \hat{\ } 1}(N_{2\alpha})$

La construction de la suite $(M_\alpha; N_{i\alpha}; \alpha \leq \chi, i = 1, 2)$ est faite par induction comme suit : Posons $M_0^* = M_0$ et $h_0 = id_{M_0}$. Supposons que la suite est contruite jusqu'au α .

Soit $\rho \in {}^\alpha 2$, et h_ρ l'homomorphisme (immersion) de M_α dans M_α^* . Par l'amalgamation asymétrique on a le digramme commutatif suivant avec i_α l'application inclusion et P_α un pec de T de cardinal au plus μ

$$\begin{array}{ccc} M_\alpha & \xrightarrow{h_\rho} & M_\alpha^* \\ i_\alpha \downarrow & & \downarrow im \\ M_{\alpha+1} & \xrightarrow{\bar{h}_\rho} & P_\alpha \end{array}$$

Posons $h_{\rho \wedge 1} = \bar{h}_\rho$. Soit f_α l'homomorphisme qui fixe M_α point par point et qui envoie $\bar{a}_{1\alpha}$ vers $\bar{a}_{2\alpha}$, donc on a $f_\alpha(N_{1\alpha}) = N_{2\alpha}$. Par amalgamation asymétrique on peut trouver Q_α un pec de cardinal au plus μ et g_α un homomorphisme (une immersion) de $M_{\alpha+1}$ dans Q_α tels que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} N_{1\alpha} & \xrightarrow{\bar{h}_\rho \circ f_\alpha} & N_{2\alpha} \\ i_\alpha \downarrow & & \downarrow im \\ M_{\alpha+1} & \xrightarrow{g_\alpha} & Q_\alpha \end{array}$$

Posons $h_{\rho \wedge 0} = g_\alpha$, alors on a

$$h_{\rho \wedge 0}(N_{1\alpha}) = h_{\rho \wedge 1} \circ f_\alpha(N_{1\alpha}) = h_{\rho \wedge 1}(N_{2\alpha})$$

On définit $M_{\alpha+1}^*$ comme étant l'amalgamé de tous les $h_{\rho \wedge 0}(M_\beta)$, $h_{\rho \wedge 1}(M_\beta)$ (où ρ parcourt l'ensemble ${}^\alpha 2$) sur la base $M_{\alpha+1}$, on a $|M_{\alpha+1}^*| \leq \chi$.

Pour tout ordinal limite α soit :

$$M_\beta^* = \bigcup_{\alpha < \beta} M_\alpha^* \text{ et pour tout } \rho \in {}^\beta 2, \quad h_\rho = \bigcup_{\alpha < \beta} h_{\rho \upharpoonright \alpha}$$

Une telle construction nous permet de déduire que pour tout $\alpha \leq \chi$, $M_\alpha^* \prec_+ M_{\alpha+1}^*$. En effet par construction on a

$$M_\beta^* = \langle h_{\rho \wedge 0}(M_\beta) \cup h_{\rho \wedge 1}(M_\beta) \mid \rho \in {}^\alpha 2 \rangle$$

et

$$M_\alpha^* = \langle h_\rho(M_\alpha) \cup h_\rho(M_\alpha) \mid \rho \in {}^\alpha 2 \rangle$$

Comme $h_\rho \hat{\ }_{i \upharpoonright \alpha} = h_\rho$, pour $i = 0, 1$ et $M_\alpha \prec_+ M_\beta$, alors $M_\alpha^* \prec_+ M_\beta^*$. Rappelons que $|M_\chi^*| \leq \chi$ car χ est un cardinal et par suite c'est un ordinal limite, par construction M_χ^* est la limite inductive d'une famille de pec tous de cardinal inférieur ou égale à μ .

Soit $h_\rho \in {}^\chi 2$, par amalgamation asymétrique il existe H_ρ une immersion de M dans un pec N_ρ de T telle que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} M_\chi & \xrightarrow{h_\rho} & M_\chi^* \\ i \downarrow & & \downarrow im \\ M & \xrightarrow{H_\rho} & N_\rho \end{array}$$

Maintenant sous l'hypothèse de la non μ -spécialité de p on montrera que la théorie T est nécessairement non μ -stable. Soient $\eta, \nu \in {}^\chi 2$ et H_η, H_ν définis comme précédemment, et soient

$$\begin{cases} p_\eta = H_\eta(p) \upharpoonright M_\chi^* \\ p_\nu = H_\nu(p) \upharpoonright M_\chi^*. \end{cases}$$

Alors on a :

$$\eta \neq \nu \in {}^\chi 2 \implies p_\eta \neq p_\nu$$

En effet posons $\sigma = \eta \wedge \nu$ (l'intersection des deux suites) de longueur γ (ie $\sigma \in {}^\gamma 2$ telle que $h_{\sigma \hat{\ }_0} \subseteq h_\eta$ et $h_{\sigma \hat{\ }_1} \subseteq h_\nu$). Par hypothèse de non μ -spécialité de p il existe $\bar{a} \in N_{1\sigma} \subset M_\chi$ et φ une formule positive tels que

$$(*) \begin{cases} p \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \\ p \not\vdash \varphi(\bar{x}, f_\sigma(\bar{a})). \end{cases}$$

Donc $p_\eta \vdash \varphi(\bar{x}, h_{\sigma \hat{\ }_0}(\bar{a}))$, par construction on a $h_{\sigma \hat{\ }_0} = \bar{h}_\sigma \circ f_\sigma$, ainsi $p_\eta \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{h}_\sigma \circ f_\sigma(\bar{a}))$

D'autre part comme $p \not\vdash \varphi(\bar{x}, f_\sigma(\bar{a}))$ il existe une formule positive $\psi \in \text{Res}_T(\varphi)$ telle que $p \vdash \psi(\bar{x}, f_\sigma(\bar{a}))$, et par le fait que $h_{\sigma \hat{\ }_1} = \bar{h}_\sigma \upharpoonright M_{\sigma+1} = H_\nu \upharpoonright M_{\sigma+1}$ on déduit que $p_\nu \vdash \psi(\bar{x}, \bar{h}_\sigma \circ f_\sigma(\bar{a}))$. Par conséquent

$$\begin{cases} p_\eta \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{h}_\sigma \circ f_\sigma(\bar{a})) \\ p_\nu \vdash \psi(\bar{x}, \bar{h}_\sigma \circ f_\sigma(\bar{a})). \end{cases}$$

Ainsi $p_\eta \neq p_\nu$ car les deux formules φ et ψ sont contradictoires, ce qui contredit la μ -stabilité de T . \square

Dans le reste de cette section on propose un encadrement topologique du type q_φ (le type-définition) associé à une formule positive φ . Le théorème 5 nous donne cet encadrement, au cours de ce théorème on a adapté positivement une technologie donnée dans le lemme 2.2 [11] pour arriver à encadrer le fermé F défini par le type partiel q_φ .

Rappelons que si $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$, A un pec de T et \bar{a} un uple de A . On note par $F_{\varphi(\bar{x}, \bar{a})}$ (resp $O_{\varphi(\bar{x}, \bar{a})}$) le fermé (resp l'ouvert) défini par $\{p \in S(A); p \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a})\}$ (resp $\{p \in S(A); p \not\vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a})\}$). De même si q est un type partiel a paramètre dans A , on note F_q par le fermé $\cup\{F_f; q \vdash f\}$

Théorème 5 *Soient T une théorie h -inductive non bornée et stable, A un pec de T , et $p \in S_n(A)$. Alors pour toute formule positive $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$, le fermé $F_{dp(\varphi)}$ associé au type $dp(\varphi)$ vérifie*

$$\bigcap_{\psi \in Res_T(\varphi)} F_{\Phi_\psi^0(\bar{y})} \subset F_{dp(\varphi)} \subset \bigcap_{\psi \in Res_T(\varphi)} O_{\Phi_\psi^1(\bar{y})}$$

où

$$\begin{aligned} \Phi_\psi^0(\bar{y}) &= \bigvee_{w \subset \{0, \dots, 2N_\psi+1\}} \bigwedge_{i \in w} \varphi_0(\bar{c}_i, \bar{y}) \quad , \\ \Phi_\psi^1(\bar{y}) &= \bigvee_{w \subset \{0, \dots, 2N_\psi+1\}} \bigwedge_{i \in w} \psi(\bar{c}_i, \bar{y}) \end{aligned}$$

et les \bar{c}_i des uplés de A dependent de ψ

Preuve. Posons $\varphi_0 = \varphi$, soit $\varphi_1 \in Res_T(\varphi_0)$ telle qu'il existe $\bar{d}, \bar{e} \in A$ qui vérifient $p \vdash \varphi_0(\bar{x}, \bar{d})$ et $p \vdash \varphi_1(\bar{x}, \bar{e})$. Comme par hypothèse la théorie T est stable alors elle n'a pas la propriété de l'ordre, par le lemme 6 il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

– 1 : Il n'existe pas $\{(\bar{c}_i, \bar{a}_i) \mid i \leq N\}$ dans A tel que :

$$\begin{cases} A \models \varphi_0(\bar{c}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i < j \\ A \models \varphi_1(\bar{c}_i, \bar{a}_j) & \text{si } i > j. \end{cases}$$

– 2 : Il n'existe pas $\{(\bar{c}_i, \bar{b}_i) \mid i \leq N\}$ dans A tel que :

$$\begin{cases} A \models \varphi_1(\bar{c}_i, \bar{b}_j) & \text{si } i < j \\ A \models \varphi_0(\bar{c}_i, \bar{b}_j) & \text{si } i > j. \end{cases}$$

La première étape de cette preuve consiste en la construction de trois suites : $\{K(i), \bar{a}_{i+1}^s \mid K(i) \text{ est une famille de parties de } \{0, \dots, i\}, s \in K(i) \text{ et } \bar{a}_{i+1}^s \in$

$A\}$
 $\{L(i), \bar{b}_{i+1}^t | L(i) \text{ est une famille de parties de } \{0, \dots, i\}, t \in L(i) \text{ et } \bar{b}_{i+1}^t \in A\}$
 $(\bar{c}_i, 0 \leq i < \omega)$ une suite de A telle que pour tout $i < \omega$

$$(*) \begin{cases} A \models \varphi_1(\bar{c}_{j+1}, \bar{a}_{i+1}^s) & \forall i \leq j, s \in K(i) \\ A \models \varphi_0(\bar{c}_{j+1}, \bar{b}_{i+1}^t) & \forall i \leq j, t \in L(i) \end{cases}.$$

La construction des trois suites est faite par induction comme suit : Choisissons \bar{c}_0 arbitrairement dans A et posons $K(-1) = L(-1) = \emptyset$. Par hypothèse, supposons qu'on a $(\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_n)$, $\{K(i), \bar{a}_{i+1}^s | i \leq n-1, s \in K(i)\}$, $\{L(i), \bar{b}_{i+1}^t | i \leq n-1, t \in L(i)\}$. On définit $K(n), L(n), \bar{c}_{n+1}, \bar{a}_{n+1}^s, \bar{b}_{n+1}^t, s \in K(n), t \in L(n)$ de la manière suivante :

$K(n) = \{w \subset \{0, \dots, n\} | \text{il existe } \bar{a} \in A \text{ tel que pour tout } i \in w \ A \models \varphi_0(\bar{c}_i, \bar{a}), \text{ et } p \vdash \varphi_1(\bar{x}, \bar{a})\}$ Pour chaque $w \in K(n)$ on prend \bar{a}_{n+1}^w un élément de A qui témoigne de l'existence de l'élément \bar{a} dans la définition de $w \in K(n)$ (ie $A \models \varphi_0(\bar{c}_i, \bar{a}_{n+1}^w), \forall i \in w$ et $p \vdash \varphi_1(\bar{x}, \bar{a}_{n+1}^w)$).

De la même manière soit

$L(n) = \{w \subset \{0, \dots, n\} | \text{il existe } \bar{b} \in A \text{ tel que pour tout } i \in w \ A \models \varphi_1(\bar{c}_i, \bar{b}) \text{ et } p \vdash \varphi_0(\bar{x}, \bar{b})\}$ Pour chaque $w \in L(n)$ on prend pour \bar{b}_{n+1}^w un élément de A qui témoigne de cela.

Maintenant pour définir \bar{c}_{n+1} on procède comme suit : Soit

$$B_n = \{\bar{a}_{i+1}^s | i \leq n, s \in K(i)\} \cup \{\bar{b}_{i+1}^t | i \leq n, t \in L(i)\}.$$

Par définition

$$\begin{cases} \forall s \in K(i), \text{ et } j \in s : & A \models \varphi_0(\bar{c}_j, \bar{a}_{i+1}^s) \quad \text{et } p \vdash \varphi_1(\bar{x}, \bar{a}_{i+1}^s) \\ \forall t \in L(i), \text{ et } k \in t : & A \models \varphi_1(\bar{c}_k, \bar{b}_{i+1}^t) \quad \text{et } p \vdash \varphi_0(\bar{x}, \bar{b}_{i+1}^t). \end{cases}$$

Alors la famille finie Γ_n définie par $\Gamma_n = \{\varphi_1(\bar{x}, \bar{a}_{i+1}^s) : i \leq n, s \in K(i)\} \cup \{\varphi_0(\bar{x}, \bar{b}_{i+1}^t) : i \leq n, t \in L(i)\} \subset p$. Soit \bar{c}_{n+1} une réalisation de Γ_n dans A . Alors on a

$$(**) \begin{cases} A \models \varphi_1(\bar{c}_{n+1}, \bar{a}_{i+1}^s) & \forall i \leq n, s \in K(i) \\ A \models \varphi_0(\bar{c}_{n+1}, \bar{b}_{i+1}^t) & \forall i \leq n, t \in L(i). \end{cases}$$

La deuxième étape de la preuve du théorème consiste à montrer les deux propriétés (a) et (b)

a- Soient $\{i_0 < i_1 < \dots < i_n < \omega\}$ et $\bar{a} \in A$ tels que :

$$\begin{cases} A \models \varphi_1(\bar{c}_{i_k}, \bar{a}) & \forall 0 \leq k \leq n \\ p \vdash \varphi_0(\bar{x}, \bar{a}) \end{cases}$$

Alors il existe $\{\bar{d}_i : i = 1, \dots, n\}$ des éléments de A tels que :

$$(I) \begin{cases} A \models \varphi_1(\bar{c}_{i_k}, \bar{d}_r) & \forall k < r \\ A \models \varphi_0(\bar{c}_{i_k}, \bar{d}_r) & \forall k > r. \end{cases}$$

En effet comme $i_0 \in L(i_0)$, on prend $\bar{d}_1 = \bar{b}_{i_0+1}^{i_0}$, alors $A \models \varphi_1(\bar{c}_{i_0}, \bar{d}_0)$. D'après (*) on a :

$$\begin{cases} A \models \varphi_1(\bar{c}_{i_0}, \bar{d}_1) \\ A \models \varphi_0(\bar{c}_{i_k}, \bar{d}_1) & \forall k = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Maintenant soit $0 < k < n$ par hypothèses de (a) on a

$$\begin{cases} A \models \varphi_1(\bar{c}_{i_p}, \bar{a}) & \forall p \leq k \\ p \vdash \varphi_0(\bar{x}, \bar{a}) \end{cases}$$

Par définition de $L(i_k)$ on a $t = \{i_0, \dots, i_k\} \in L(i_k)$. Posons $\bar{d}_{k+1} = \bar{b}_{i_k+1}^t$ ainsi

$$A \models \varphi_1(\bar{c}_{i_p}, \bar{d}_{k+1}) \quad p = 0, \dots, k$$

Et par (*)

$$A \models \varphi_0(\bar{c}_{i_p}, \bar{d}_{k+1}) \quad \forall p \geq k+1$$

D'où la construction de la suite $\{\bar{d}_i : i = 1, \dots, n\}$ d'éléments de A .

b- Soit $\{i_0 < i_1 < \dots < i_n < \omega\}$ et $\bar{b} \in A$ tels que :

$$\begin{cases} A \models \varphi_0(\bar{c}_{i_k}, \bar{b}) & \forall 0 \leq k \leq n \\ D \models \varphi_1(\bar{c}^*, \bar{b}) \end{cases}$$

Alors il existe $\{e_i : i = 1, \dots, n\}$ des éléments de A tels que :

$$(II) \begin{cases} A \models \varphi_0(\bar{c}_{i_k}, \bar{e}_r) & \forall k < r \\ A \models \varphi_1(\bar{c}_{i_k}, \bar{e}_r) & \forall k > r. \end{cases}$$

La démonstration de (b) est la même que celle de (a). Dans ce qui suit on va conclure la preuve du théorème.

Soit W un sous ensemble de $N+1$ élément de $\{0, 1, \dots, 2N+1\}$. Supposons qu'il existe $\bar{a} \in A$ tel que $A \models \bigwedge_{i \in W} \varphi_1(\bar{c}_i, \bar{a})$. Alors d'après (2) + I on déduit que $p \models \neg \varphi_0(\bar{x}, \bar{a})$.

De même d'après s'il existe $\bar{a} \in A$ tel que $A \models \bigwedge_{i \in W} \varphi_0(\bar{c}_i, \bar{a})$. Par (1) + II on déduit que $p \vdash \varphi_1(\bar{x}, \bar{a})$.

Maintenant pour toute formule positive $\psi \in Res_T \varphi_0(\bar{x}, \bar{y})$ on définit un couple de formules positives $(\Phi_\psi^0, \Phi_\psi^1)$ telles que

$$\begin{cases} \Phi_\psi^0(\bar{y}) = \bigvee_{w \subset \{0, \dots, 2N_\psi+1\}} \bigwedge_{i \in w} \varphi_0(\bar{c}_i, \bar{y}) \\ \Phi_\psi^1(\bar{y}) = \bigvee_{w \subset \{0, \dots, 2N_\psi+1\}} \bigwedge_{i \in w} \psi(\bar{c}_i, \bar{y}). \end{cases}$$

Avec N_ψ est le nombre d'alternance du couple (φ, ψ) donné par le lemme 6 (rappelons aussi que les $\bar{c}_i; i < \omega$ dépendent de ψ). Posons

$$\begin{cases} P_{\varphi_0}(\bar{y}) = \{\Phi_\psi^0(\bar{y}) \mid \psi \in \text{Res}_{\varphi_0}(\bar{x}, \bar{y})\}. \\ Q_{\varphi_0}(\bar{y}) = \{\Phi_\psi^1(\bar{y}) \mid \psi \in \text{Res}_{\varphi_0}(\bar{x}, \bar{y})\} \end{cases}$$

On remarque que pour tout $\bar{a} \in A$ si $P_{\varphi_0}(\bar{a})$ alors $p \models \neg\psi(\bar{x}, \bar{a})$ pour toute ψ dans $\text{Res}_{\varphi_0}(\bar{x}, \bar{y})$ donc $p \vdash \varphi_0(\bar{x}, \bar{a})$.

De même si $p \vdash \varphi_0(\bar{x}, \bar{a})$, d'après (a) + (2) on déduit que pour toute formule $\psi \in \text{Res}_{\varphi_0}(\bar{x}, \bar{y})$ on a $A \models \neg\Phi_\psi^0(\bar{a})$ autrement a ne réalise aucune formule de $Q_{\varphi_0}(\bar{y})$.

L'encadrement recherché en découle. \square

dans le reste de cette section on étudiera une forme faible de la stabilité positive, on imposons d'autre conditions sur la type-définissabilité des types. Un exemple de telle stabilité est donné par les théories h-inductives modèle-complète.

Lemme 16 *Soient T une théorie h-inductive modèle-complète stable, A un modèle de T , et φ une formule positive. Alors pour tout type $p \in S(A)$ il existe une famille finie $\{\bar{c}_i \mid i < N_\varphi\}$ d'uples de A tels que $dp(\varphi)$ est une combinaison booléenne positive des formules $\{\varphi(\bar{c}_i \mid i < N_\varphi)$*

Preuve. Comme la théorie T est modèle-complète alors il existe une formule positive $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ telle que $\text{Res}_T(\varphi) = \{\psi\}$. Par le fait que T est stable on a vu dans la preuve du théorème 5 après la construction de la famille d'uples $\{\bar{c}_i \mid i \leq 2N + 1\}$ (N est le nombre d'alternance associée au couple (φ, ψ)) de A . On a les deux propositions (a) et (b) suivantes :

a- Soient $\{i_0 < i_1 < \dots < i_n < \omega\}$ et $\bar{a} \in A$ tels que :

$$\begin{cases} A \models \psi(\bar{c}_{i_k}, \bar{a}) \quad \forall 0 \leq k \leq n \\ p \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \end{cases}$$

Alors il existe $\{\bar{d}_i : i = 1, \dots, n\}$ des éléments de A tels que :

$$(I) \begin{cases} A \models \psi(\bar{c}_{i_k}, \bar{d}_r) \quad \forall k < r \\ A \models \varphi(\bar{c}_{i_k}, \bar{d}_r) \quad \forall k > r. \end{cases}$$

b- Soit $\{i_0 < i_1 < \dots < i_n < \omega\}$ et $\bar{b} \in A$ tels que :

$$\begin{cases} A \models \varphi(\bar{c}_{i_k}, \bar{b}) & \forall 0 \leq k \leq n \\ p \models \psi(\bar{x}, \bar{b}) \end{cases}$$

Alors il existe $\{e_i : i = 1, \dots, n\}$ des éléments de A tels que :

$$(II) \begin{cases} A \models \varphi(\bar{c}_{i_k}, \bar{e}_r) & \forall k < r \\ A \models \psi(\bar{c}_{i_k}, \bar{e}_r) & \forall k > r. \end{cases}$$

Supposons que $p \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{a})$ avec $\bar{a} \in A$ alors par la propriété (a) on déduit que pour toute sous-famille w de cardinal N de $\{\bar{c}_i | i < 2N + 1\}$ on a

$$A \not\models \bigwedge_{i \in w} \psi(\bar{c}_i, \bar{a})$$

car sinon le couple (φ, ψ) ordonnera une famille de taille supérieure à N . Ainsi $A \models \bigvee_{i \in w} \psi(\bar{c}_i, \bar{a})$ pour tout w de cardinal N extraite de la famille $\{\bar{c}_i | i < 2N + 1\}$.

Maintenant supposons que $p \not\models \varphi(\bar{x}, \bar{a})$, alors $p \vdash \psi(\bar{x}, \bar{a})$. Toujours par la même raisons on déduit à partir de la propriété (b) que pour toute famille w de cardinal N de $\{\bar{c}_i | i < 2N + 1\}$ on a $A \models \bigwedge_{i \in w} \varphi(\bar{c}_i, \bar{a})$.

Ainsi on déduit que $dp(\varphi)(\bar{y})$ est donné par $\bigwedge_w \bigvee_{i \in w} \varphi(\bar{c}_i, \bar{y})$. \square

Une question naturelle à partir du lemme 16 sur la nature du type-définissabilité dans le cas d'une théorie h-inductive, est ce qu'une morlisation convenable peut nous donner des informations sur la nature du type-définissabilité.

Définition 21 Une théorie h-inductive est dite stable faiblement si pour tout pec A de T et toutes type $p \in S(A)$ et B une extension élémentaire positive de A . La famille de formule positive

$$\Gamma = \{\varphi(\bar{x}, \bar{b}) | B \models dp(\varphi)(\bar{b})\}$$

est un type de $S(B)$.

Remarque : Sous les hypothèses de la définition 21, supposons que $\Gamma \not\models \varphi(\bar{x}, \bar{b})$ d'une part ceci est équivalent à $B \not\models dp(\varphi)(\bar{b})$, d'autre part comme B est un pec $\Gamma \not\models \varphi(\bar{x}, \bar{b})$ implique l'existence d'une formule positive ψ dans $Res_{T(A)}(\varphi)$ telle que $\Gamma \vdash \psi(\bar{x}, \bar{b})$. Ainsi on déduit que si $B \not\models dp(\varphi)(\bar{b})$, alors il existe ψ dans $Res_{T(A)}(\varphi)$ telle que $\Gamma \vdash \psi(\bar{x}, \bar{b})$

Corollaire 8 Toute théorie h-inductive modèle-complète stable est stable fortement.

4 De la stabilité à la simplicité positives

Dans [12] Pillay a défini les notions de division, déviation, et de simplicité dans le cadre d’une théorie universelle au sens classique de la théorie des modèles. La spécialité dans ce contexte est la définition de la déviation qu’on peut traduire de la manière suivante : un type (existentiel) $p(\bar{x})$ dévie sur un ensemble A si et seulement si le fermé défini par le type $p(\bar{x})$ est recouvert par une famille de fermés F_{φ_i} , $i \in I$ (avec I un ensemble fini ou infini, et F_{φ_i} est le fermé défini par la formule φ_i) tels que pour tout $i \in I$, la formule φ_i divise sur I . Dans le cadre d’une théorie universelle ou dans le cadre de la théorie des modèles positive, les fermés F_{φ_i} ne sont pas nécessairement des ouverts. Par suite, on ne peut pas en extraire un sous recouvrement fini. En se basant sur cette notion de déviation, il a étudié les propriétés de la simplicité qu’il a définie par la *non-déviation* sur un petit ensemble de paramètres. Nous nous référerons à cette notion de simplicité comme “simplicité au sens de Pillay”.

Dans [3], Ben Yaacov a introduit une division positive qui est équivalente à celle donnée dans [12] et qui témoigne la k –inconsistance par une formule positive. Ensuite il a proposé une nouvelle définition de la simplicité caractérisée par la *non-division* sur une petite partie de l’ensemble des paramètres ou par la finitude du rang D . Cette simplicité sera dite “au sens de Ben Yaacov”.

Il est clair que la simplicité au sens de Pillay implique celle au sens de Ben Yaacov. En effet, l’implication est stricte comme le justifie l’exemple 4.3 de [3]. Ce même exemple montre que la stabilité positive n’implique pas la simplicité au sens de Pillay. En renforçant nos hypothèses sur les rangs des types et leurs propriétés d’extension, et en reprenant les travaux de Pillay [12], de Ben Yaacov [3], de Kim [8] et de Wagner [22], nous obtiendrons une condition suffisante pour l’équivalence entre les deux notions de simplicité (le corollaire 9).

4.1 Les simplicités positives

Nous utiliserons les appellations “simplicité au sens de Pillay” et “simplicité au sens de Ben Yaacov” telles qu’elles étaient définies dans l’introduction. Les notions de division et déviation seront introduites dans les définitions 22 et 23 respectivement.

Définition 22 – Soient $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ une L -formule positive, $k \in \mathbb{N}$,

$$\psi(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k) \in \text{Res}_T(\exists \bar{x} \bigwedge_{i=1}^k \varphi(\bar{x}, \bar{y}_i))$$

et $(\bar{a}_i | i < \lambda)$ une suite d'uples de M . On dit que ψ est un témoin de k -inconsistance de $\{\varphi(\bar{x}, \bar{a}_i) | i < \lambda\}$ si $M \models \psi(\bar{a}_{i_1}, \dots, \bar{a}_{i_k})$, pour tout $(\bar{a}_{i_1}, \dots, \bar{a}_{i_k})$ de taille k de la suite $(\bar{a}_i | i < \lambda)$. En parlant du même phénomène, on dira alternativement que la famille $\{\varphi(\bar{x}, \bar{a}_i) | i < \lambda\}$ est (ψ, k) -inconsistante.

- Soient $p(\bar{x}, B)$ un type partiel à paramètres dans B et $A \subset B$. On dit que $p(\bar{x}, B)$ divise sur A s'il existe une suite A -indiscernable $(\bar{b}_i | i < \omega)$ telle que $tp(B/A) = tp(\bar{b}_0/A)$ et la famille $\{p(\bar{x}, \bar{b}_i) | i < \omega\}$ est inconsistante. On peut en fait supposer que b_0 est une énumération de B .
- Soient $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ une L -formule positive, $k \in \mathbb{N}$,

$$\psi(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k) \in \text{Res}_T(\exists \bar{x} \bigwedge_{i=1}^k \varphi(\bar{x}, \bar{y}_i))$$

et $\bar{b} \in M$. On dit que $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ (ψ, k) -divise sur $A \subset M$ s'il existe une suite A -indiscernable $(\bar{b}_i | i < \omega)$ telle que $tp(\bar{b}/A) = tp(\bar{b}_0/A)$ et que la formule ψ est un témoin de k -inconsistance de la suite $(\varphi(\bar{x}, \bar{b}_i) | i < \omega)$.

En utilisant la compacité positive, on vérifie le caractère fini de la division.

Lemme 17 *Un type partiel $p(\bar{x}, B)$ divise sur A , si et seulement si il existe $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ une formule positive, $k \in \mathbb{N}$ et $\psi(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k) \in \text{Res}_T(\exists \bar{x} \bigwedge_{i=1}^k \varphi(\bar{x}, \bar{y}_i))$ tels que $p(\bar{x}, B) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{b})$ et $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ (ψ, k) -divise sur A .*

Preuve. Par définition de la division de $p(\bar{x}, B)$ sur A , il existe $(\bar{b}_i | i < \omega)$ une suite A -indiscernable telle que $tp(B/A) = tp(\bar{b}_0/A)$ et que la famille $\{p(\bar{x}, \bar{b}_i) | i < \omega\}$ est inconsistante. Par compacité positive, il existe $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ telle que $p(\bar{x}, B) \vdash \varphi(\bar{x}, \bar{b})$ et la famille $\{\varphi(\bar{x}, \bar{b}_i) | i < \omega\}$ est inconsistante. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{N}$ telle que $M \models \neg \exists \bar{x} \bigwedge_{i=1}^k \varphi(\bar{x}, \bar{b}_i)$, ce qui implique l'existence d'une formule positive $\psi(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k) \in \text{Res}_T(\exists \bar{x} \bigwedge_{i=1}^k \varphi(\bar{x}, \bar{y}_i))$ telle que $M \models \psi(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k)$. Comme la suite $(\bar{b}_i | i < \omega)$ est A -indiscernable on déduit que $\varphi(\bar{x}, \bar{b})$ (ψ, k) -divise sur A . \square

Remarque : Le lemme 17 nous permet aussi de déduire l'équivalence entre division et (ψ, k) -division pour un certain entier naturel k et une formule positive ψ .

Fait 10 ([3]) *Soit T une théorie h -inductive, les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

1. Pour tout couple de formules positives (φ, ψ) et k un entier naturel tels que $\psi(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k) \in \text{Res}_T(\exists \bar{x} \bigwedge_{i=1}^k \varphi(\bar{x}, \bar{y}_i))$, on a $D(\bar{x} = \bar{x}, \varphi, \psi, k) < \omega$.
2. Pour tout ensemble $A \subset M$, et $\bar{b} \in M$, il existe $A_0 \subset A$ tel que $|A_0| \leq |T| + |\bar{b}|$ et $tp(\bar{b}/A)$ ne k -divise pas sur A_0 .

Fait 11 Toute théorie h -inductive et stable positivement vérifier les deux propriétés du fait 10

Définition 23 ([12], Définition 3.2) Soient p un type partiel à paramètres dans un ensemble B , et $A \subset B$. On dit que p dévie (resp k -dévie) sur A s'il existe $\{\chi_i(\bar{x}, \bar{m}_i) | i \in I\}$ une famille de formules positives à paramètres dans M telles que :

1. $p(\bar{x}) \vdash \bigvee_{i \in I} \chi_i(\bar{x}, \bar{m}_i)$.
2. Pour tout $i \in I$, $\chi_i(\bar{x}, \bar{m}_i)$ divise (resp. k -divise) sur A .

Définition 24 ([12], Définition 3.6) Soient $A \subset M$ un pec et $p(\bar{x})$ un type maximal sur A (ie $p(\bar{x}) \in S(A)$). Une suite $(\bar{a}_i | i < \omega)$ de réalisations de $p(\bar{x})$ est dite une suite de Morley de $p(\bar{x})$, si elle est A -indiscernable et $tp(\bar{a}_i/A \cup \{\bar{a}_j | j < \omega\})$ ne divise pas sur A pour tout $i < \omega$.

Fait 12 ([12] Lemma 3.5) Soient $p(\bar{x})$ un type partiel à paramètres dans C , et A, B deux ensembles tels que $A \subset C \subset B$. Supposons que $p(\bar{x})$ ne dévie pas sur A , alors il existe une réalisation \bar{a} de p telle que $tp(\bar{a}/B)$ ne divise pas sur A .

Preuve. Soit $\varphi(\bar{x})$ la famille des formules positives qui divisent sur A . Comme $p(\bar{x})$ ne dévie pas sur A , il existe \bar{a} une réalisation de $p(\bar{x})$ telle que $M \models \neg \varphi(\bar{a})$ pour toute formule $\varphi(\bar{x})$ de $\varphi(\bar{x})$.

Montrons que $tp(\bar{a}/B)$ ne divise pas sur A . En effet sinon il existe $\varphi(\bar{x})$ une formule positive à paramètres dans B telle que $tp(\bar{a}/B) \vdash \varphi(\bar{x})$ et $\varphi(\bar{x})$ divise sur A . C'est une contradiction puisque par définition de \bar{a} , $M \models \neg \varphi(\bar{a})$.

□

Lemme 18 Soient T une théorie h -inductive telle que tout type à paramètres dans un pec ne dévie pas sur lui même, $A \subset M$ un pec de T et $p(\bar{x})$ un type maximal sur A (ie $p \in S(A)$). Alors $p(\bar{x})$ admet une suite de Morley.

Preuve. Par induction on construit une suite large $(\bar{a}_i, i < \lambda)$ de réalisations de $p(\bar{x})$ telle que pour tout $i < \lambda$, $tp(\bar{a}_i/A \cup \{\bar{a}_j | j < i\})$ ne divise pas sur A .

Soit \bar{a}_0 une réalisation de $p(\bar{x})$. Supposons par induction que la suite est construite jusqu'à $\alpha < \lambda$. Posons $B = A \cup \{\bar{a}_i | i \leq \alpha\}$, Comme $p(\bar{x})$ ne dévie pas sur A , ainsi par le fait 12 il existe $\bar{a}_{\alpha+1}$ une réalisation de $p(\bar{x})$ telle que $tp(\bar{a}_{\alpha+1}/B)$ ne divise pas sur A . La construction de la suite s'ensuit.

Maintenant pour un λ convenable et par le corollaire 8, on peut extraire de la suite construite $(\bar{a}_i | i < \lambda)$ une sous suite $(\bar{b}_i | i < \omega)$ A -indiscernable. Ainsi la suite $(\bar{b}_i | i < \omega)$ est une suite de Morley de $p(\bar{x})$. \square

Lemme 19 ([12], Lemma 3.8) *Soient T une théorie h -inductive, non bornée et complète. Soient $I = (\bar{a}_i | i < \omega)$ une suite de Morley sur A , $(\bar{a}^i | i < \omega)$ une suite A -indiscernable telle que $\bar{a}^0 = \bar{a}_0$. Alors il existe $J = (\bar{b}_i | 1 \leq i < \omega)$ une suite telle que pour tout $j < \omega$, $tp(\bar{a}^j, \bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots / A) = tp(I)$ et la suite $(\bar{a}^j | j < \omega)$ est $A \cup \{J\}$ -indiscernable.*

Preuve. Par induction supposons qu'il existe $\{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n\}$ tels que

$$tp(\bar{a}^0, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n / A) = tp(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n / A)$$

et que $(\bar{a}^j | j < \omega)$ est $A \cup \{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n\}$ -indiscernable. Par compacité positive, pour tout ordinal λ on peut prolonger la suite $(\bar{a}^j | j < \omega)$ en une suite de taille λ et qui est $A \cup \{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n\}$ -indiscernable. Soit $p(\bar{x})$ l'image de $tp(\bar{a}_{n+1}/A \cup \{\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n\})$ par un automorphisme de M qui fixe A point par point et qui envoie $(\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n)$ vers $(\bar{a}^0, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n)$. Comme $tp(\bar{a}_{n+1}/A \cup \{\bar{a}_0, \dots, \bar{a}_n\})$ ne divise pas sur A , $p(\bar{x})$ ne divise pas sur A . Maintenant pour tout $j < \lambda$ notons par $p^j(\bar{x})$ l'image de $p(\bar{x})$ par un automorphisme de M qui fixe $A \cup \{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n\}$ point par point et qui envoie \bar{a}^0 vers \bar{a}^j . Comme $p(\bar{x})$ ne divise pas sur A , on conclut que $\bigcup \{p^j(\bar{x}) | j < \lambda\}$ est consistante, et on en fixe une réalisation \bar{c} . Pour un λ large, en utilisant le lemme 8, on extrait de la suite $((\bar{a}^j, \bar{c}) | j < \lambda)$ une sous suite $((\bar{b}^j, \bar{c}) | j < \omega)$ qui est $A \cup \{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n\}$ -indiscernable. Soit \bar{c}' l'image de \bar{c} par un automorphisme de M qui fixe $A \cup \{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n\}$ point par point et qui envoie $(\bar{b}^j | j < \omega)$ vers $(\bar{a}^j | j < \omega)$. Posons $\bar{b}_{n+1} = \bar{c}'$. La construction de la suite $(\bar{b}_i | 1 \leq i < \omega)$ s'ensuit. \square

Un raisonnement basé sur le lemme 17 nous permet d'utiliser la méthode originale de [8] pour aboutir à une caractérisation bien connue de la division.

Proposition 2 ([8] Proposition 2.1) *Soient T une théorie h -inductive complète non bornée, et qui vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. T est positivement stable ;
2. tout type à paramètres dans un pec de T ne dévie pas sur lui même,
 $p(\bar{x})$ un type à paramètres dans B et $A \subset B$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $p(\bar{x}, B)$ divise sur A .
2. Pour toute suite de Morley $(\bar{b}_i | i < \omega)$ sur A , telle que $tp(\bar{b}_i / A) = tp(B / A)$, la famille $\{p(\bar{x}, \bar{b}_i) | i < \omega\}$ est inconsistante.

Preuve.

(1 \implies 2) Soit $I = (\bar{b}_i | i < \omega)$ une suite de Morley de $tp(B / A)$. Supposons que $p(\bar{x}, B)$ divise sur A , alors par la définition 22 et le lemme 17 il existe $(\bar{a}_i | i < \omega)$ une suite A -indiscernable de $tp(B / A)$, un couple de formules positives (φ, ψ) et un entier naturel k , tels que :

- $\psi(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k) \in Res_T(\exists \bar{x} \bigwedge_{i=1}^k \varphi(\bar{x}, \bar{y}_i))$,
- $p \vdash \varphi(\bar{x}, B)$,
- $(\varphi(\bar{x}, \bar{a}_i) | i < \omega)$ est (ψ, k) -inconsistante.
- $\bar{a}_0 = \bar{b}_0$, pour cette propriété il suffit de prendre l'image de la suite donnée par la définition 22 par un automorphisme qui fixe A et qui envoie \bar{a}_0 vers \bar{b}_0 .

Ensuite par le fait 19, il existe une suite $J = (\bar{c}_i | 1 \leq i < \omega)$ telle que pour tout $j < \omega$

- $tp(\bar{a}_j, J / A) = tp(I / A)$,
- la suite $(\bar{a}_i | j < \omega)$ est $A \cup J$ -indiscernable.

Remarquons que la suite J est A -indiscernable et que $tp(J / A) = tp(I / A)$.

Maintenant nous allons montrer que la famille $P_J = \{p(\bar{x}, \bar{c}_j) | 1 \leq j < \omega\}$ est inconsistante. Par l'absurde supposons que P_J est consistante, et posons $\Phi_J = \{\varphi(\bar{x}, \bar{c}_i) | 1 \leq i < \omega\}$, alors Φ_J est consistante. Comme la théorie T est supposée stable, par le fait 11 il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

- $D(\Phi_J, \varphi, \psi, k) = n$,
- $D(\Phi_J \cup \{\varphi(\bar{x}, \bar{a}_j), \varphi, \psi, k\}) = n$. En effet, ceci découle directement du fait que pour tout $j < \omega$ on a $tp(\bar{a}_j, J / A) = tp(I / A) = tp(J / A)$ et que le rang D est invariant par automorphisme.

Or la famille $(\varphi(\bar{x}, \bar{a}_j) | j < \omega)$ est (ψ, k) -inconsistante, ce qui implique par la définition du rang D positive [3] que $D(\varphi_J, \varphi, \psi, k) \geq n + 1$, contradiction. Ainsi P_J est inconsistante. Comme $tp(I / A) = tp(J / A)$, on déduit que la famille $P_I = \{p(\bar{x}, \bar{b}_i) | i < \omega\}$ est inconsistante.

(2 \implies 1) est immédiate. \square

Fait 13 ([12] Corollaire 3.10) *Soient T une théorie h -inductive complète non bornée, et qui vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. *T est positivement stable ;*
2. *tout type à paramètres dans un pec de T ne dévie pas sur lui même.*

Soient $p(\bar{x}, B)$ un type sur B et $A \subset B$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *$p(\bar{x}, B)$ divise sur A .*
2. *$p(\bar{x}, B)$ dévie sur A .*

Preuve. $(1 \implies 2)$ est immédiat.

$(2 \implies 1)$ Supposons que $p(\bar{x}, B)$ dévie sur A . Par définition, il existe $\{\varphi_i(\bar{x}, C) \mid i \in I\}$ une famille de formules positives à paramètres dans C telles que $p(\bar{x}) \vdash \bigvee_{i \in I} \varphi_i(\bar{x}, C)$ et pour tout $i \in I$, $\varphi_i(\bar{x}, C)$ divise sur A . Ceci implique que le type partiel $p(\bar{x}, B) = p(\bar{x}, B \cup C)$ dévie sur A . Posons $B \cup C = D$. Soit $(\bar{c}_j \mid j < \omega)$ une suite de Morley de $tp(D/A)$. En utilisant la compacité positive, on prolonge cette suite à $(\bar{d}_i \mid i < \lambda)$, A -indiscernable avec $\lambda > |I|$.

Montrons que la famille $\cup\{p(\bar{x}, \bar{d}_j) \mid j < \lambda\}$ n'est pas consistante. Supposons par l'absurde que \bar{e} est une réalisation de cette famille dans M . Pour tout $j < \lambda$, il existe $i \in I$ tel que \bar{e} réalise $\varphi_i(\bar{x}, \bar{d}_i)$. Pour un choix de λ assez large justifié par le corollaire 8, il existe $i \in I$ et E une partie de λ tels que \bar{e} réalise $\varphi_i(\bar{x}, \bar{d}_j)$ pour tout $j \in E$. Comme $(\bar{d}_j \mid j < \lambda)$ est A -indiscernable, soit f un automorphisme de M qui fixe A point par point et qui envoie $(\bar{d}_j \mid j < \omega)$ vers $(\bar{c}_j \mid j < \omega)$. On déduit que $f(\bar{e})$ réalise la famille $\{\varphi_i(\bar{x}, \bar{c}_j) \mid j < \omega\}$. Comme $\varphi_i(\bar{x}, \bar{c})$ divise sur A , par la proposition 2 on aboutit à une contradiction. \square

Corollaire 9 *Soient T une théorie h -inductive complète non bornée, et qui vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. *T est positivement stable ;*
2. *tout type à paramètres dans un pec de T ne dévie pas sur lui même,*

Alors la simplicité au sens Ben Yaacov est équivalente à la simplicité au sens de Pillay.

Preuve. En général, la simplicité au sens de Pillay implique la simplicité au sens de Ben Yaacov.

Maintenant soit T une théorie simple au sens de Ben Yaacov et qui vérifie les conditions (1) et (2). Par définition de la simplicité de Ben Yaacov et par le fait 13, on a équivalence entre division et déviation. Ce qui implique la simplicité au sens de Pillay. \square

Lemme 20 *Toute théorie stable faiblement est simple au sens de Pillay.*

Preuve. Il suffit de montrer que sous l'hypothèse de la stabilité faible tout type ne dévie pas sur lui même. Supposons qu'il existe A un pec de T et $p \in S(A)$ qui dévie. Alors il existe une famille de formule positive à paramètres dans M indexée par un ordinal α , $\{\varphi_i(\bar{x}, \bar{m}_i) | i < \alpha\}$ telle que $p \vdash \bigvee_{i < \alpha} \varphi_i(\bar{x}, \bar{m}_i)$, et pour tout $i < \alpha$ la formule $\varphi_i(\bar{x}, \bar{m}_i)$ divise sur A .

Pour tout $i < \alpha$ soit $\{\bar{m}_{ij} | j < \omega\}$ une suite A -indiscernable telle que $\bar{m}_{i0} = \bar{m}_i$ et la famille $\{\varphi_i(\bar{x}, \bar{m}_{ij}) | j < \omega\}$ est inconsistante. Soit B un pec de T qui contient $A \cup \{\bar{m}_{ij} | i, j < \omega\}$, et soit q le type de $S(B)$ associé à la définition p sur A . Alors il existe $i < \alpha$ tel que $q \vdash \varphi_i(\bar{x}, \bar{m}_i)$, autrement $B \models dp(\varphi_i)(\bar{m}_i)$, comme $dp(\varphi_i)$ est à paramètres dans A alors pour tout $j < \omega$ $B \models dp(\varphi_i)(\bar{m}_{ij})$. Absurde, ainsi p ne dévie pas sur lui même. \square

Références

- [1] Mohammed Belkasmi. *Positive model theory and amalgamation*. *preprint publication*, 2011
- [2] Itai Ben Yaacov. *Positive model theory and compact abstract theories*. *Journal of Mathematical Logic*, vol. 3, No. 1 (2003), 85–118
- [3] Itai Ben Yaacov. *Simplicity in compact abstract theories*. *Journal of Mathematical Logic*, vol. 3, No 2 (2003), 163–191
- [4] Itai Ben Yaacov, Bruno Poizat. *Fondements de la logique positive*. *Journal of Symbolic Logic*, 72, 4, 1141–1162, 2007.
- [5] Steven Buechler. *Essential stability theory*. Springer, 1996.
- [6] Wilfrid Hodges. *Model theory*. CUP, 1993.
- [7] Ehud Hrushovski. *Simplicity and the Lascar group*. *preprint publication*. 1997
- [8] Byunghan Kim. *Forking in simple unstable theories*. *Journal of the London Mathematical Society*, 1989, no. 2, 257–267.
- [9] Almaz Kungozhin. *Existentially closed and maximal models in positive logic*. *prepublication*. 2011
- [10] Anand Pillay. *An Introduction to Stability Theory*. Oxford Science Publications, 1983.
- [11] Anand Pillay. *Geometric Stability Theory*. Oxford Science Publications, 1996.

- [12] Anand Pillay Forking in the category of existentially closed structures *Quaderni di Matematica*, 6, *Università de Naples*.
- [13] Bruno Poizat. *Cours de théorie des modèles. Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah*, 1985.
- [14] Bruno Poizat. *Quelques effets pervers de la positivité. Preprint*, 2008.
- [15] Bruno Poizat. *Univers Positifs. Journal of Symbolic Logic*, 71, 3, 969–976, 2006.
- [16] Saharon Shelah. *The lazy model-theoretician's guide to stability. Logique et Analyse*, vol. 71-72, 241-308, 1975.
- [17] Saharon Shelah. *Categoricity of abstract classes with amalgamation. Annals of Pure and Applied Logic*, 98(1-3), pages 141–187, 1999.
- [18] Saharon Shelah Classification Theory and the number of non-isomorphic models *North-Holland. Studies in logic and foundations of mathematics*, volume 92, 1990.
- [19] Saharon Shelah Classification Theory for Elementary Abstract Classes *Mathematical Logic and Foundations.*, 2009.
- [20] Saharon Shelah Simple unstable theories *Annals of mathematical logic*. 19 (1980) 177-203.
- [21] Thomas Jech, Karel Hrbacek. *Introduction to set theory. CRC Press. Pure and applied mathematics*, 1999.
- [22] Frank Olaf Wagner. *Simple theories. Mathematics and its applications*, v. 503 , 2000.